

Обнаружение грубых погрешностей измерений

Обычно результат измерения, содержащий грубую погрешность, сразу виден в ряду измеренных значений, но в каждом конкретном случае это необходимо доказать. Одним из критериев для оценки промаха является критерий Романовского.

В этом случае используют *уровень значимости* β , который определяется равенством

$$\beta = \frac{|M_x - x_{\min/\max}|}{S_x}, \quad \text{где } M_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ — среднее арифметическое,}$$

где x_i — результат измерения в ряду измеренных значений; $x_{\min/\max}$ — результат измерения, подозрительный на содержание грубой погрешности (x_{\min} — наименьший результат измерения в ряду измеренных значений, x_{\max} — наибольший результат измерения в ряду измеренных значений); S_x — статистическое среднее квадратическое отклонение (СКО)

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^2}{(n-1)}}, \quad \text{где } n \text{ — количество измерений.}$$

Обнаружение грубых погрешностей измерений

В зависимости от выбранной доверительной вероятности P , т.е. от желания экспериментатора получить уверенный результат проверки гипотезы, и числа измерений n из табл. 1 находят теоретический уровень значимости β_T и сравнивают с ним рассчитанное значение β . Если $\beta > \beta_T$, то результат $x_{\min/\max}$ следует отбросить как содержащий грубую погрешность. Если $\beta < \beta_T$, то выборку следует сохранить в полном объёме.

Как правило, критерий Романовского применяют при объёме выборки $n < 20$.

1. Значения теоретического уровня значимости β_T

n	P		
	0,90	0,95	0,99
3	1,412	1,414	1,414
5	1,869	1,917	1,972
7	2,093	2,182	2,310
9	2,238	2,349	2,532
11	2,343	2,470	2,689
13	2,426	2,563	2,809
15	2,523	2,670	2,946
17	2,551	2,701	2,983
19	2,601	2,754	3,049

Обнаружение грубых погрешностей измерений

Задача 1. При многократном измерении напряжения электрического тока с помощью цифрового вольтметра получены значения в В: 10,38; 10,37; 10,39; 10,38; 10,39; 10,44; 10,41; 10,5; 10,45; 10,39; 11,1; 10,45. Проверить полученные результаты измерений на наличие грубой погрешности с вероятностью $P = 0,95$.

Решение.
1. По формуле $M_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ находится среднее арифметическое значение M_x

$$M_x = \frac{10,38 + 10,37 + 10,39 + 10,38 + 10,39 + 10,44 + 10,41 + 10,5 + 10,45 + 10,39 + 11,1 + 10,45}{12} = 10,47 \text{ В.}$$

2. По формуле $S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^2}{(n-1)}}$, рассчитывается среднее квадратическое отклонение S_x данного ряда

$$S_x = \sqrt{\frac{0,09^2 + 0,1^2 + 0,08^2 + 0,09^2 + 0,08^2 + 0,03^2 + 0,06^2 + 0,03^2 + 0,02^2 + 0,08^2 + 0,63^2 + 0,02^2}{(12-1)}} = 0,2.$$

Обнаружение грубых погрешностей измерений

3. Из ряда измеренных значений напряжения выбираем результаты, подозрительные на содержание грубой погрешности: наименьший $x_{\min} = 10,37$ В и наибольший $x_{\max} = 11,1$ В.

Рассчитываем критерий β_{\min} для $x_{\min} = 10,37$ В

$$\beta_{\min} = \frac{|10,47 - 10,37|}{0,2} = 0,5.$$

Рассчитываем критерий β_{\max} для $x_{\max} = 11,1$ В

$$\beta_{\max} = \frac{|10,47 - 11,1|}{0,2} = 3,15.$$

4. Из таблицы 1 при заданном значении доверительной вероятности $P = 0,95$ и числа измерений $n = 12$ находим теоретический уровень значимости β_T для данного ряда $\beta_T = 2,52$.

1. Значения теоретического уровня значимости β_T

n	P		
	0,90	0,95	0,99
11	2,343	2,470	2,689
13	2,426	2,563	2,809

Обнаружение грубых погрешностей измерений

1. Значения теоретического уровня значимости β_T

n	P		
	0,90	0,95	0,99
11	2,343	2,470	2,689
13	2,426	2,563	2,809

Примечание. Значение β_T для $n = 12$ находится следующим образом

$$\beta_{T/n=12} = \frac{\beta_{T/n=11} + \beta_{T/n=13}}{2}.$$

Аналогично находятся значения β_T для всех чётных значений n .

5. Сравниваем значения β_{\min} и β_{\max} с найденным значением β_T :

$$0,5 < 2,52, \text{ т.е. } \beta_{\min} < \beta_T,$$

следовательно результат $x_{\min} = 10,37$ В не содержит грубую погрешность и его следует оставить в ряду измеренных значений.

$$3,15 > 2,52, \text{ т.е. } \beta_{\max} > \beta_T,$$

следовательно результат $x_{\max} = 11,1$ В содержит грубую погрешность и его следует исключить из ряда измеренных значений.

Обнаружение грубых погрешностей измерений

5. Сравниваем значения β_{\min} и β_{\max} с найденным значением β_T :

$$0,5 < 2,52, \text{ т.е. } \beta_{\min} < \beta_T,$$

следовательно результат $x_{\min} = 10,37$ В не содержит грубую погрешность и его следует оставить в ряду измеренных значений.

$$3,15 > 2,52, \text{ т.е. } \beta_{\max} > \beta_T,$$

следовательно результат $x_{\max} = 11,1$ В содержит грубую погрешность и его следует исключить из ряда измеренных значений.

6. После исключения промаха из ряда значений необходимо пересчитать значения M_x , S_x , β_{\min} и β_{\max} , так как изменилось x_{\max} ($x_{\max} = 10,5$ В) и количество измерений n ($n = 11$).

$$M_x = 10,414; S_x = 0,041; \beta_{\min} = 1,069 \text{ для } x_{\min} = 10,37 \text{ В}; \beta_{\max} = 2,116 \text{ для } x_{\max} = 10,5 \text{ В}; \beta_{T/n=11} = 2,47.$$

Как видно $1,069 < 2,47$, т.е. $\beta_{\min} < \beta_T$, и $2,11 < 2,47$, т.е. $\beta_{\max} < \beta_T$. Из приведённых расчётов следует, что полученный ряд измеренных значений напряжения электрического тока не содержит промахов с вероятностью $P = 0,95$.

Обнаружение грубых погрешностей измерений

Задачи для самостоятельного решения

При многократном измерении физической величины X получен ряд измеренных значений. Используя критерий Романовского, необходимо проверить полученные результаты измерений на наличие грубой погрешности с вероятностью P .

Исходные данные

№ задачи	X	Результаты измерений	P
1	$U, В$	4,25; 4,21; 4,23; 4,21; 4,25; 4,23; 4,26; 4,22; 4,21; 4,23; 4,86; 4,21; 4,25; 4,24; 4,26; 4,22	0,90
2	$R, кОм$	7,36; 7,32; 7,34; 7,32; 7,36; 7,97; 7,34; 7,37; 7,33; 7,32; 7,34; 7,32; 7,36; 7,38; 7,37; 7,33	0,95
3	$I, А$	85,6; 85,7; 85,9; 85,6; 85,7; 85,8; 84,12; 85,6; 85,9; 85,9; 85,7; 85,8; 85,7; 85,8; 85,9; 85,6	0,99

Расчет погрешностей многократных равноточных измерений

Результаты многократных наблюдений, получаемые при прямых измерениях величины X , называются **равноточными** (*равнорассеянными*), если они являются независимыми, одинаково распределёнными случайными величинами. Измерения проводятся одним наблюдателем в одинаковых условиях внешней среды и с помощью одного и того же средства измерения.

Доверительными границами погрешности результата измерений называется наибольшее и наименьшее значения погрешности измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение погрешности результата измерений.

Статистическая обработка группы результатов наблюдения при равноточных измерениях, нормальном распределении, выполняется в такой последовательности.

1. Производятся равноточные измерения неизвестной величины X_n раз. После отбрасывания сомнительных результатов получают результаты n измерений: x_1, x_2, \dots, x_n .

Расчет погрешностей многократных равноточных измерений

2. Среднее основного нормального распределения оценивают как среднее арифметическое \bar{x} n результатов:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (1)$$

3. Определяется оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (2)$$

4. Доверительный интервал рассчитывается с учётом заданной доверительной вероятности P : $\bar{x} - S t_{n,P} < \bar{x} < S t_{n,P} + \bar{x}$, (3)

где $t_{n,P}$ – квантиль распределения Стьюдента. Значения $t_{n,P}$ в зависимости от заданной доверительной вероятности P и количества измерений n даны в табл.

Расчет погрешностей многократных равноточных измерений

Значения квантиля распределения Стьюдента

$n - 1$	$P = 0,95$	$P = 0,99$	$n - 1$	$P = 0,95$	$P = 0,99$
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
10	2,228	3,165	28	2,048	2,763
12	2,179	3,055	30	2,043	2,750
14	2,145	2,977	∞	1,960	2,576

5. Результат измерения величины X представляют в виде доверительного интервала в форме неравенства (3) с указанием доверительной вероятности P .

Расчет погрешностей многократных равноточных измерений

Задача 1. При многократном изменении температуры T в производственном помещении получены значения в градусах Цельсия: 20,4; 20,2; 20,0; 20,5; 19,7; 20,3; 20,4; 20,1. Укажите доверительные границы истинного значения температуры в помещении с вероятностью $P = 0,95$.

Решение.

По формуле (1) находится среднее значение \bar{T} :

$$\bar{T} = \frac{20,4 + 20,2 + 20,0 + 20,5 + 19,7 + 20,3 + 20,4 + 20,1}{8} = 20,2 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

По формуле (2) вычисляется среднее квадратическое отклонение среднего арифметического S :

$$S = \sqrt{\frac{(20,2 - 20,4)^2 + (20,2 - 20,2)^2 + (20,2 - 20,0)^2 + (20,2 - 20,5)^2 + \dots}{8 \cdot (8 - 1)} + \dots} = 0,09.$$

Расчет погрешностей многократных равноточных измерений

По таблице находим значение $t_{n,P}$ при доверительной вероятности $P = 0,95$ и $n - 1 = 7$.

$$t_{n,P} = 2,365.$$

4.1. Значения квантиля распределения Стьюдента

$n - 1$	$P = 0,95$	$P = 0,99$	$n - 1$	$P = 0,95$	$P = 0,99$
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797

Доверительные границы истинного значения температуры в помещении с вероятностью $P = 0,95$ рассчитываются по формуле (3):

$$20,2 - 0,09 \cdot 2,365 < \bar{T} < 20,2 + 0,09 \cdot 2,365.$$

Окончательно результат измерения температуры T в производственном помещении $20 < \bar{T} < 20,4$; $P = 0,95$ или $T = 20,2 \pm 0,2$ °C, $P = 0,95$.

Расчет погрешностей многократных равноточных измерений

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. При многократном измерении силы F получены значения в Н: 403; 408; 410; 405; 406; 398; 496; 404. Укажите доверительные границы истинного значения силы с вероятностью $P = 0,95$.

Задача 2. При многократном измерении силы электрического тока получены значения в А: 0,8; 0,85; 0,8; 0,79; 0,82; 0,78; 0,79; 0,8; 0,84. Укажите доверительные границы истинного значения силы тока с вероятностью $P = 0,99$.

Задача 3. При многократном измерении длины балки L получены значения в мм: 90,3; 90; 89,8; 89,9; 90,4; 90; 90,3; 89,1; 90,5; 90,4; 90. Укажите доверительные границы истинного значения длины с вероятностью $P = 0,95$.

Правила представления результатов измерений

Погрешности измерения должны содержать не более двух (т. е. одну или две) значащих цифры. Для этого следует использовать следующие правила и порядок ограничения числа значащих цифр.

1. Если первая значащая цифра в абсолютной погрешности Δ_x “1”, “2”, “3”, то в погрешности оставляем две значащие цифры. Если первая значащая цифра в погрешности “4”, “5”, “6”, “7”, “8”, “9”, то в погрешности оставляем одну значащую цифру.

Примеры ограничения числа значащих цифр и округления погрешности

Пример	Пояснения
0,154 \approx 0,15 1,967 \approx 2,0 19,37 \approx 19 144,1 \approx 0,14 \cdot 10 ³	Первая значащая цифра погрешности “1”, поэтому оставляем две значащие цифры. Замечание. При необходимости число записывают с множителем 10^n , где n – показатель степени.
0,394 \approx 0,39 3,94 \approx 3,9	Первая значащая цифра погрешности “3”, поэтому оставляем две значащие цифры.
0,397 \approx 0,4 3,97 \approx 4	Первая значащая цифра погрешности “3”, поэтому оставляем две значащие цифры, но так как при округлении цифра “3” превращается в цифру “4”, то оставляем только одну значащую цифру.

Представление результатов измерений

Задача 2. Округлите значения погрешностей:

0,9136 \approx

14,25 \approx

0,1936 \approx

44,25 \approx

0,1963 \approx

0,521 \approx

0,2579 \approx

19,57 \approx

0,9671 \approx

254,1 \approx

0,251 \approx

2,94 \approx

0,451 \approx

5,94 \approx

0,45 \approx

125000,126 \approx

0,55 \approx

0,00135 \approx

0,35 \approx

0,00435 \approx

Представление результатов измерений

Задача 2. Округлите значения погрешностей:

$$0,9136 \approx 0,9$$

$$14,25 \approx 14$$

$$0,1936 \approx 0,19$$

$$44,25 \approx 40$$

$$0,1963 \approx 0,20$$

$$0,521 \approx 0,5$$

$$0,2579 \approx 0,26$$

$$19,57 \approx 20$$

$$0,9671 \approx 1,0$$

$$254,1 \approx 250$$

$$0,251 \approx 0,25$$

$$2,94 \approx 2,9$$

$$0,451 \approx 0,5$$

$$5,94 \approx 6$$

$$0,45 \approx 0,4$$

$$125000,126 \approx 1,3 \cdot 10^5$$

$$0,55 \approx 0,6$$

$$0,00135 \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$$

$$0,35 \approx 0,35$$

$$0,00435 \approx 0,004$$

Представление результатов измерений

Задача 3. Округлите измеренные значения и их погрешности:

$$14,234 \pm 0,0516 \approx$$

$$131,375 \pm 0,951 \approx$$

$$139,375 \pm 1,764 \approx$$

$$139,375 \pm 4,764 \approx$$

$$132,364 \pm 2,71 \approx$$

$$132,364 \pm 4,71 \approx$$

$$132,346 \pm 1,98 \approx$$

$$322,349 \pm 0,15 \approx$$

$$322,349 \pm 0,75 \approx$$

Правила представления результатов измерений

При ограничении числа значащих цифр используем операцию округления. Округление числа представляет собой отбрасывание значащих цифр справа после определенного разряда с возможным изменением цифры этого разряда.

Существуют следующие правила округления.

1. Если первая из отбрасываемых цифр меньше чем “5”, то цифра предыдущего разряда не изменяется.

2. Если первая из отбрасываемых цифр больше чем “5”, то цифра предыдущего разряда увеличивается на единицу.

3. Если отбрасываются несколько цифр и первая из отбрасываемых цифр “5”, то цифра предыдущего разряда увеличивается на единицу.

4. Если отбрасывается только одна цифра “5”, а за ней нет цифр, то округление производится до ближайшего четного числа, т. е. цифра предыдущего разряда остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

5. Округление следует выполнять сразу до желаемого числа значащих цифр, а не по этапам, что может привести к ошибкам.

Если табличные или экспериментальные данные приводятся без указания погрешности, то обычно считается, что эта погрешность составляет $\pm 0,5$ последней значащей цифры.

Представление результатов измерений

Задача 3. Округлите измеренные значения и их погрешности:

$$14,234 \pm 0,0516 \approx 14,23 \pm 0,05$$

$$131,375 \pm 0,951 \approx 131,4 \pm 1,0$$

$$139,375 \pm 1,764 \approx 139,4 \pm 1,8$$

$$139,375 \pm 4,764 \approx 139 \pm 5$$

$$132,364 \pm 2,71 \approx 132,4 \pm 2,7$$

$$132,364 \pm 4,71 \approx 132 \pm 5$$

$$132,346 \pm 1,98 \approx 132,3 \pm 2,0$$

$$322,349 \pm 0,15 \approx 322,35 \pm 0,15$$

$$322,349 \pm 0,75 \approx 322,3 \pm 0,8$$

Представление результатов измерений

Задача 3. Округлите измеренные значения и их погрешности:

$$14,234 \pm 0,0516 \approx 14,23 \pm 0,05$$

$$322,394 \pm 0,45 \approx$$

$$131,375 \pm 0,951 \approx 131,4 \pm 1,0$$

$$432,394 \pm 39,81 \approx$$

$$139,375 \pm 1,764 \approx 139,4 \pm 1,8$$

$$432,934 \pm 38,97 \approx$$

$$139,375 \pm 4,764 \approx 139 \pm 5$$

$$45618,8 \pm 1098,93 \approx$$

$$132,364 \pm 2,71 \approx 132,4 \pm 2,7$$

$$45678,8 \pm 4098,95 \approx$$

$$132,364 \pm 4,71 \approx 132 \pm 5$$

$$456788 \pm 1050 \approx$$

$$132,346 \pm 1,98 \approx 132,3 \pm 2,0$$

$$0,0005234 \pm 0,00016 \approx$$

$$322,349 \pm 0,15 \approx 322,35 \pm 0,15$$

$$0,0015264 \pm 0,00046 \approx$$

$$322,349 \pm 0,75 \approx 322,3 \pm 0,8$$

$$0,0005834 \pm 0,000045 \approx$$

Представление результатов измерений

Задача 3. Округлите измеренные значения и их погрешности:

$$14,234 \pm 0,0516 \approx 14,23 \pm 0,05 \quad 322,394 \pm 0,45 \approx 322,4 \pm 0,4$$

$$131,375 \pm 0,951 \approx 131,4 \pm 1,0 \quad 432,394 \pm 39,81 \approx 432 \pm 40$$

$$139,375 \pm 1,764 \approx 139,4 \pm 1,8 \quad 432,934 \pm 38,97 \approx 433 \pm 39$$

$$139,375 \pm 4,764 \approx 139 \pm 5 \quad 45618,8 \pm 1098,93 \approx (45,6 \pm 1,1) \cdot 10^3$$

$$132,364 \pm 2,71 \approx 132,4 \pm 2,7 \quad 45678,8 \pm 4098,95 \approx (46 \pm 4) \cdot 10^3$$

$$132,364 \pm 4,71 \approx 132 \pm 5 \quad 456788 \pm 1050 \approx (456,8 \pm 1,0) \cdot 10^3$$

$$132,346 \pm 1,98 \approx 132,3 \pm 2,0 \quad 0,0005234 \pm 0,00016 \approx (5,2 \pm 1,6) \cdot 10^{-4}$$

$$322,349 \pm 0,15 \approx 322,35 \pm 0,15 \quad 0,0015264 \pm 0,00046 \approx (15 \pm 5) \cdot 10^{-4}$$

$$322,349 \pm 0,75 \approx 322,3 \pm 0,8 \quad 0,0005834 \pm 0,000045 \approx (58 \pm 4) \cdot 10^{-5}$$

Представление результатов измерений

Вычисленная погрешность

Округленная погрешность

$$\Delta = 137,153 \text{ м}$$

$$\Delta = 2,42 \text{ кг}$$

$$\Delta = 0,01546 \text{ А}$$

$$\Delta = 0,0327 \text{ В}$$

$$\Delta = 516,78 \text{ Дж}$$

$$\Delta = 78,59 \text{ Гн}$$

$$C_{\text{ИЗМ}} = 0,0014964 \text{ Ф}; \Delta = \pm 0,000123 \text{ Ф}$$

$$m_{\text{ИЗМ}} = 34667,83 \text{ г}; \Delta = \pm 867,15 \text{ г}$$

$$t_{\text{ИЗМ}} = 29,756 \text{ с}; \Delta = \pm 0,0172 \text{ с}$$

Представление результатов измерений

Вычисленная погрешность

$$\Delta = 137,153 \text{ м}$$

$$\Delta = 2,42 \text{ кг}$$

$$\Delta = 0,01546 \text{ А}$$

$$\Delta = 0,0327 \text{ В}$$

$$\Delta = 516,78 \text{ Дж}$$

$$\Delta = 78,59 \text{ Гн}$$

Округленная погрешность

$$\Delta = 140 \text{ м}$$

$$\Delta = 2,4 \text{ кг}$$

$$\Delta = 0,015 \text{ А}$$

$$\Delta = 0,033 \text{ В}$$

$$\Delta = 500 \text{ Дж}$$

$$\Delta = 80 \text{ Гн}$$

$$C_{\text{ИЗМ}} = 0,0014964 \text{ Ф}; \Delta = \pm 0,000123 \text{ Ф}$$

$$C_{\text{ИЗМ}} = (1,5 \pm 0,12) \text{ мФ}$$

$$m_{\text{ИЗМ}} = 34667,83 \text{ г}; \Delta = \pm 867,15 \text{ г}$$

$$m_{\text{ИЗМ}} = (34,7 \pm 0,9) \text{ кг}$$

$$t_{\text{ИЗМ}} = 29,756 \text{ с}; \Delta = \pm 0,0172 \text{ с}$$

$$t_{\text{ИЗМ}} = (29,756 \pm 0,017) \text{ с}$$