Литература

1. Сергеев А.Г., Терегеря В.В. Метрология, стандартизация и сертификация: учеб. для бакалавров. – М.: Юрайт, 2012.

2.Сергеев А.Г., Латышев М.В., Терегеря В.В. Метрология, стандартизация и сертификация. – М.: Логос, 2005.

3. Козлов М.Г. Метрология и стандартизация. – М., СПб: Петербургский институт печати, 2001.

4. Законы Российской Федерации: “Об обеспечении единства измерений”, “О стандартизации”, “О техническом регулировании”, “О защите прав потребителей”.

5. ГОСТ 28195-89 “Оценка качества программных средств”.

6. ГОСТ РИСО/МЭК 9125-93 “Оценка программной продукции. Характеристики качества и руководство по их применению”.

5. Крылова Г.Д. Основы стандартизации, сертификации, метрологии: учеб. для ВУЗов. - М.: ЮНИТИ, 2017

Метрология, стандартизация и сертификация. Основные понятия.

Теоретической основой любой измерительной техники является – метрология.

Метрология – наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения заданного уровня точности. В переводе с греческого метрон – мера, логос – учение, понятие, т.е. учение о мерах.

Д. И. Менделеев, выполнивший исключительно важные работы в области метрологии, говорил – «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять». Организованная им в 1893 г. Палата мер и весов ныне является центральным метрологическим учреждением России и называется Всероссийским научно-исследовательским институтом метрологии (ВНИИМ) им. Д.И. Менделеева.

Метрология делится на три самостоятельных и взаимодополняющих раздела.

- Теоретическая метрология
- Прикладная метрология
- Законодательная метрология

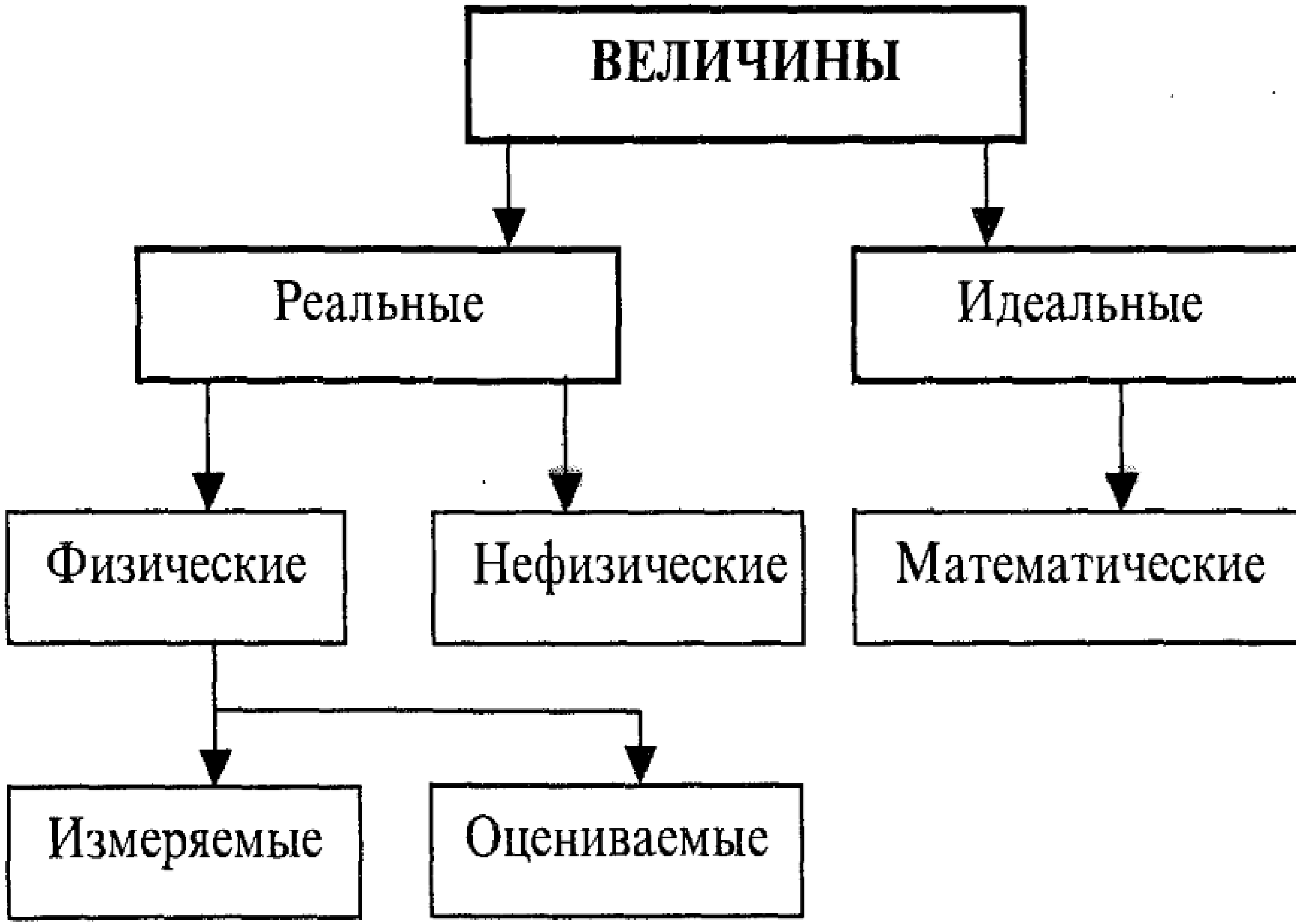
Теоретическая метрология, в которой излагаются общие вопросы теории измерений.

Прикладная метрология рассматривает комплексы общих правил, требований и норм, а так же другие вопросы, нуждающиеся в регламентации и контроле со стороны государства, направленные на обеспечение единства измерений и единообразия средств измерений.

Законодательная метрология рассматривает комплексы общих правил, требований и норм, а также другие вопросы, нуждающиеся в регламентации и контроле со стороны государства, направленные на обеспечение единства измерений и единообразия средств измерений (СИ).

К основным задачам метрологии относятся:

1. Общая теория измерений.
2. Единицы физических величин и их системы.
3. Методы и средства измерений.
4. Методы определения точности измерений.
5. Основы обеспечения единства измерений и единообразия СИ.
6. Эталоны и рабочие эталоны.
7. Методы передачи размеров единиц от эталонов или рабочих эталонов рабочим СИ.


ВЕЛИЧИНЫ
Реальные
Идеальные
Физические
Нефизические
Математические
Измеряемые
Оцениваемые

Международная система величин (СИ)

Величина			Единица		
				Обозначение	
Наименование	Размериость	Рекомендуемое обозначение	Наименование	русское	международное
	Основные				
Длина	L	l	метр	м	m
Масса	M	m	килограмм	кг	kg
Время	T	t	секунда	с	s
Сила электрического тока	I	I	ампер	А	A
Термодинамическая температура	Q	T	кельвин	К	K
Количество вещества	N	n, v	моль	моль	mol
Сила света	J	J	канделла	кд	cd

Приставки СИ (для кратных единиц)

Кратные единицы — единицы, которые в целое число раз (10 в какой-либо степени) превышают основную единицу измерения некоторой физической величины. Международная система единиц (СИ) рекомендует следующие десятичные приставки для обозначений кратных единиц:

Десятичный множитель	Приставка		Обозначение		Пример
	русская	международная	русское	международное	
10^1	дека	deca	да	da	дал — декалитр
10^2	гекто	hecto	г	h	гПа — гектопаскаль
10^3	кило	kilo	к	k	кН — килоньютон
10^6	мега	mega	М	M	МПа — мегапаскаль
10^9	гига	giga	Г	G	ГГц — гигагерц
10^{12}	тера	tera	Т	T	ТВ — теравольт
10^{15}	пета	peta	П	P	Пфлопс — петафлопс
10^{18}	экса	exa	Э	E	Эм — эксаметр
10^{21}	зетта	zetta	З	Z	ЗэВ — зеттаэлектронвольт
10^{24}	иотта	yotta	И	Y	Иг — иоттаграмм

Приставки СИ (для кратных единиц)

В программировании и индустрии, связанной с компьютерами, те же приставки «кило», «мега», «гига», «тера» и т. д. в случае применения к величинам, кратным степеням двойки, могут означать как кратность 1000, так и $1024=2^{10}$. Какая именно система применяется, иногда ясно из контекста (напр., применительно к объёму оперативной памяти используется кратность 1024, а применительно к полному объёму дисковой памяти жестких дисков — кратность 1000).

1 килобайт	$= 1024^1 = 2^{10}$	= 1024 байт
1 мегабайт	$= 1024^2 = 2^{20}$	= 1 048 576 байт
1 гигабайт	$= 1024^3 = 2^{30}$	= 1 073 741 824 байт
1 терабайт	$= 1024^4 = 2^{40}$	= 1 099 511 627 776 байт
1 петабайт	$= 1024^5 = 2^{50}$	= 1 125 899 906 842 624 байт
1 эксабайт	$= 1024^6 = 2^{60}$	= 1 152 921 504 606 846 976 байт
1 зеттабайт	$= 1024^7 = 2^{70}$	= 1 180 591 620 717 411 303 424 байт
1 йоттабайт	$= 1024^8 = 2^{80}$	= 1 208 925 819 614 629 174 706 176 байт

Приставки СИ (для дольных единиц)

Дольные единицы составляют определённую долю (часть) от установленной единицы измерения некоторой величины. Международная система единиц (СИ) рекомендует следующие приставки для обозначений дольных единиц:

Десятичный множитель	Приставка		Обозначение		Пример
	русская	международная	русское	международное	
10^{-1}	деци	deci	д	d	дм — дециметр
10^{-2}	санти	centi	с	c	см — сантиметр
10^{-3}	милли	milli	м	m	мН — миллиньютон
10^{-6}	микро	micro	мк	μ	мкм — микрометр
10^{-9}	нано	nano	н	n	нм — нанометр
10^{-12}	пико	pico	п	p	пФ — пикофарад
10^{-15}	фемто	femto	ф	f	фл — фемтолитр
10^{-18}	атто	atto	а	a	ас — аттосекунда
10^{-21}	зепто	zepto	з	z	зКл — зептокулон
10^{-24}	иокто	yocto	и	y	иг — иоктограмм

Правила использования приставок

- Приставки следует писать слитно с наименованием единицы или, соответственно, с её обозначением.
- Использование двух или более приставок подряд (напр., микромиллифарад) не разрешается.
- Обозначения кратных и дольных единиц исходной единицы, возведённой в степень, образуют добавлением соответствующего показателя степени к обозначению кратной или дольной единицы исходной единицы, причём показатель означает возведение в степень кратной или дольной единицы (вместе с приставкой). Пример: 1 км^2 = (10^3 м)^2 = 10^6 м^2, а не 10^3 м^2. Наименования таких единиц образуют, присоединяя приставку к наименованию исходной единицы: квадратный километр (а не кило-квадратный метр).
- Если единица представляет собой произведение или отношение единиц, приставку, или её обозначение, присоединяют, как правило, к наименованию или обозначению первой единицы: кПа·с/м (килопаскаль-секунда на метр). Присоединять приставку ко второму множителю произведения или к знаменателю допускается лишь в обоснованных случаях.
- Для образования кратных и дольных единиц массы вместо единицы массы *килограмм* используется дольная единица массы *грамм* и приставка присоединяется к слову *грамм*. Дольная единица массы *грамм* применяется без присоединения приставки.
- Использовать приставки следует в соответствии со степенной формой представления чисел, например: 5320 м = 5,32·10^3 м = 5,32 км. Приставку обычно выбирают таким образом, чтобы число, стоящее перед приставкой, находилось в диапазоне от 0,1 до 1000, однако во многих случаях допускается отход от этого правила; так, в машиностроении принято выражать все линейные размеры на чертежах в миллиметрах даже при размерах более 1000 мм.

Основные понятия, относящиеся к измерениям, используемых в метрологии и измерительной технике

Физической величиной (параметром) называют свойство, общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта.

Размер физической величины – количественное содержание в данном объекте свойства, соответствующего понятию физическая величина (ФВ).

Размер служит для отображения количественного различия между физическими объектами по рассматриваемому свойству. В результате формируется заключение о сравниваемых объектах: длиннее или короче, тяжелее или легче, теплее или холоднее и т.п.

Единица физической величины – это физическая величина, которой, по определению, приписано значение, равное единице. Единицу физической величины определяют путем пропорционального деления основного интервала шкалы физической величины.

$$[S]=(S_1-S_0)/n, \qquad (1.1)$$

$$[S]=(S_1-S_0)/n, \quad (1.1)$$

где: $[S]$ – некоторый размер ФВ, называемый единицей ФВ;

S_1 – верхний размер ФВ (конечный);

S_0 – нижний размер ФВ (начальный);

n – доля интервала ФВ

(S_1-S_0) – интервал между размерами S_1 и S_0, называемый основным интервалом шкалы ФВ.

Измеряемая величина – это ФВ, выбранная для измерения.

Измерение – это нахождение физической величины (ФВ) опытным путем с помощью специальных технических средств.

В более широком смысле измерение – это процесс приема и преобразования информации об измеряемой величине с целью получения сравнительного результата; сравнения её с принятой шкалой или единицей измерения и выдачи её в форме пригодной для дальнейшего использования человеком или ЭВМ.

Измерительное преобразование – отражение размера одной ФВ размером другой ФВ, функционально с ней связанной.

Процесс решения любой задачи измерения включает в себя три этапа: подготовку, проведение измерения (эксперимента) и обработку результатов.

Процесс измерения включает в себя ряд составных элементов, которые показаны на рис. 1.1.

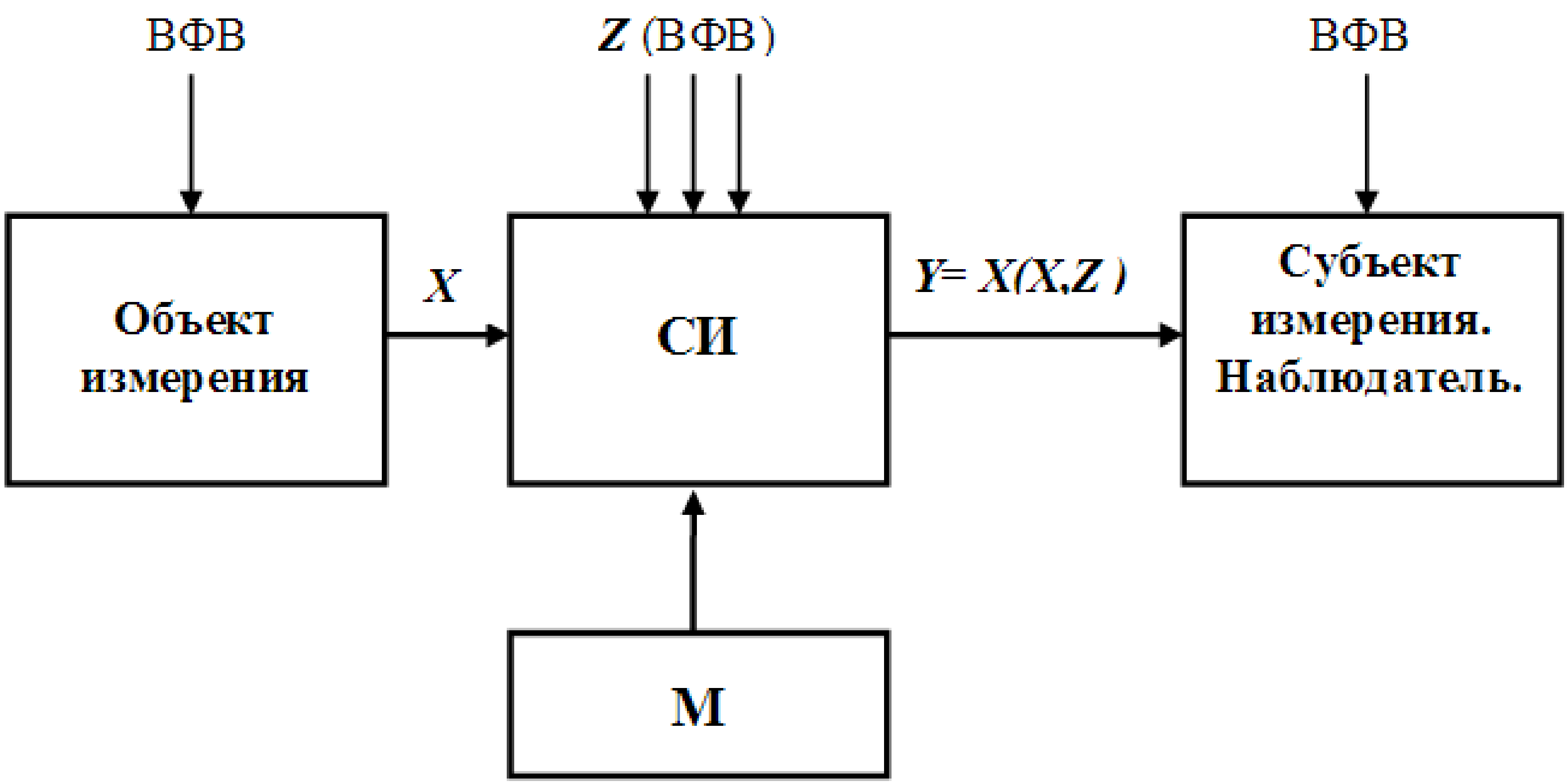


Рис. 1.1. Структурная схема процесса измерения:
СИ – средство измерения; М – мера; Y – результат измерения;
X – измеряемая величина; Z – влияющая физическая величина (ВФВ)

Объект измерения – это сложное явление или процесс, характеризующийся множеством отдельных ФВ (параметров), каждая из которых может быть измерена в отдельности, но в реальных условиях действует на измерительное устройство совместно со всеми остальными параметрами. В теплоэнергетике основными объектами измерения являются котел, турбина и их вспомогательное оборудование.

В процессе измерения на СИ, оператора и объект измерения воздействуют внешние факторы – влияющие физические величины ВФВ.

ВФВ называют ФВ, которая не измеряется данным СИ, но оказывает влияние на результат измерения, проведённым этим средством (температура окружающей среды, атмосферное давление, влажность и т.п.).

В общем случае СИ называется техническое средство (мера, измерительный прибор или преобразователь, измерительная система), используемое при измерениях и имеющее нормированные метрологические характеристики (класс точности, вариация и т.п.).

Мера – средство измерений, предназначенное для воспроизведения физической величины заданного размера.

Результат измерений величины X можно записать в виде формулы, называемой основным уравнением измерения:

$$X = Y[X], \tag{1.2}$$

где Y – отвлеченное число, называемое числовым значением ФВ;

$[X]$ – единица ФВ.

Результат измерения – это значение физической величины, найденное путём её измерения.

Различают истинное и действительное значение измеряемой величины.

Истинное значение ФВ – значение ФВ, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство объекта.

В философском аспекте истинное значение всегда остается неизвестным, а совершенствование измерений позволяет приближаться к истинному значению физической величины. $T_{п.в.}=100^0C=99{,}974^0C$.

В метрологическом аспекте истинным значением измеряемой величины называется её значение свободное от погрешности измерения, т.е. не содержащее погрешности:

$$Y_u = \varphi (X_u), \quad \text{если} \quad M = M_u . \qquad (1.3)$$

Истинное значение измеряемой величины практически получить невозможно, поэтому уравнение (1.3) перепишем следующим образом:

$$Y_u \pm \Delta Y = \varphi(X_u \pm \Delta X), \quad \text{если} \quad M = M_u \pm \Delta M, \qquad (1.4)$$

где ΔY – погрешность результата измерений;
ΔX – погрешность измеряемой величины;
ΔM – погрешность меры.

Если эти погрешности минимально возможные, которые можно получить при современном уровне измерительной техники, то данный результат измерений можно назвать действительным значением ФВ.

Действительное значение ФВ – это значение ФВ, найденное экспериментальным путём и настолько приближающееся к истинному, что для данной цели может быть использовано вместо него.

Принцип измерения – совокупность физических явлений, на которых основано измерение.

Метод измерения – совокупность приёмов использования принципов и средств измерений.

Погрешность (или ошибка) измерения – отклонение результаты измерения $\boldsymbol{Y}$ от истинного значения $\boldsymbol{Y_u}$ измеряемой величины:

$$\pm\Delta = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y_u}. \tag{1.5}$$

Погрешность, определяемая формулой (1.5), выражается в единицах измеряемой величины и называется абсолютной погрешностью.

Относительная погрешность измерения – отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины:

$$\pm\boldsymbol{\delta} = \Delta/\boldsymbol{Y_u}\,. \tag{1.6}$$

Точность измерения – качество измерения, отражающее близость его результата к истинному значению измеряемой величины. Количественно точность может быть выражена величиной, обратной относительной погрешности, взятой по модулю:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = |\,\boldsymbol{Y_u}/\Delta\,|. \tag{1.7}$$

При определении абсолютной и относительной погрешности, а также точности измерения, вместо истинного значения ФВ $\boldsymbol{Y_u}$ реально может быть использовано ее действительное значение $\boldsymbol{Y_Д}$.

Классификация измерений

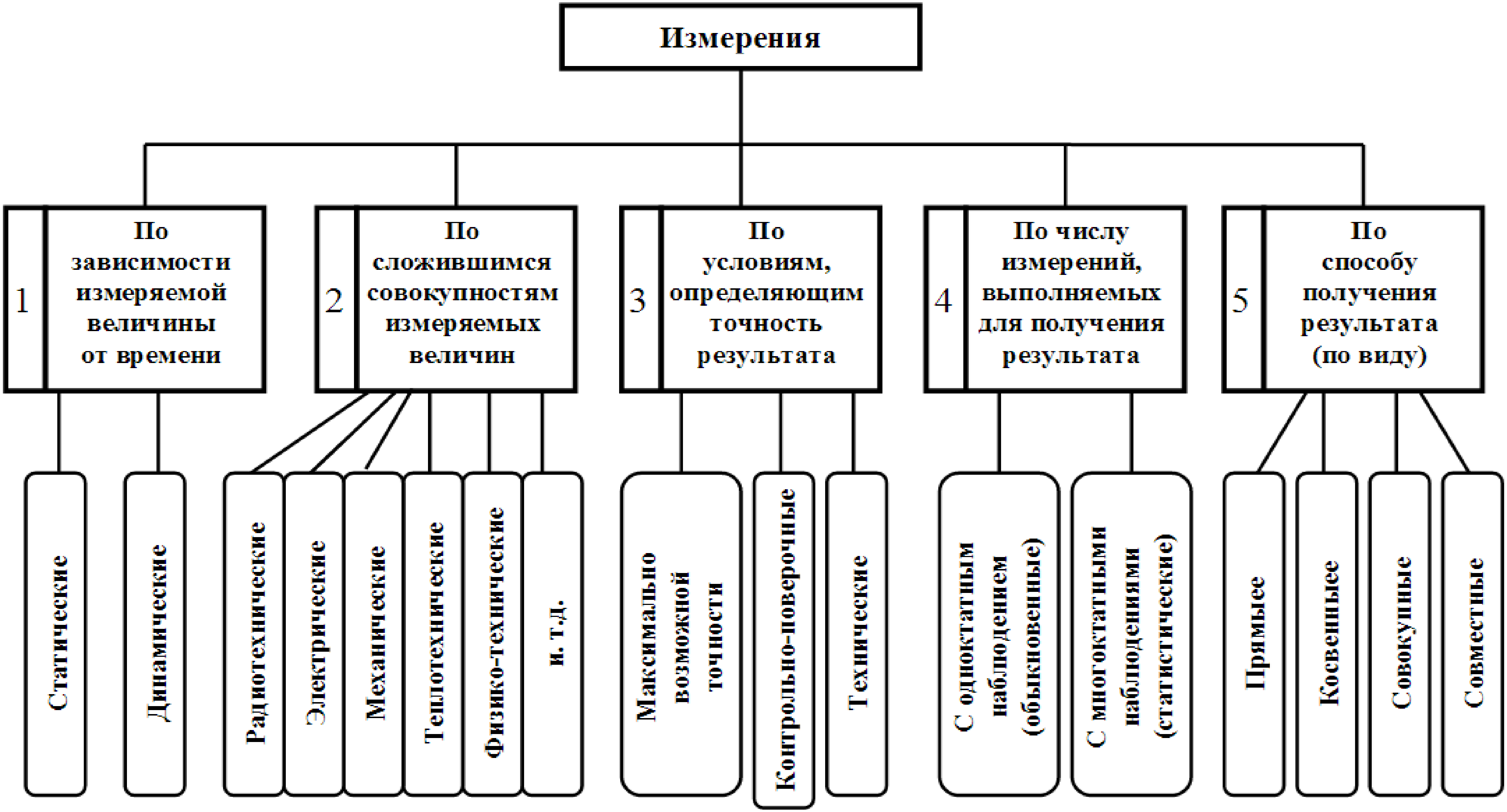


Рис. 1.2. Классификация измерений

Классификация измерений

Измерения классифицируются по нескольким признакам, наиболее важные из которых представлены в виде схемы на рис. 1.2.

Прямыми называют измерения, при которых искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных (по показаниям ИП). Математически прямое измерение описывается уравнением (1.2).

Примером прямых измерений может служить: измерение длины линейкой, массы – весами, температуры – термометром, давление – манометром.

Косвенными называют измерения, при которых искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, измеренными прямым методом.

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \tau), \tag{1.8}$$

где Y – искомая, косвенно измеренная величина;

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ – величины, измеренные прямым методом;

τ – время.

Классификация измерений

Примером косвенных измерений может служить измерение расхода методом переменного перепада давления, электрического сопротивления по падению напряжения и силе тока и т.п.

Совокупными называют производимые одновременно измерения нескольких одноимённых величин, при которых искомые значения величины находят решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин или ряда других величин, функционально связанных с измеряемыми.

Совместными называют проводимые одновременно измерения двух или нескольких разноимённых величин для нахождения зависимости между ними. Примером совместных измерений может служить измерение тепловой энергии по температуре, давлению и расходу теплоносителя, определение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения.

Методы измерений

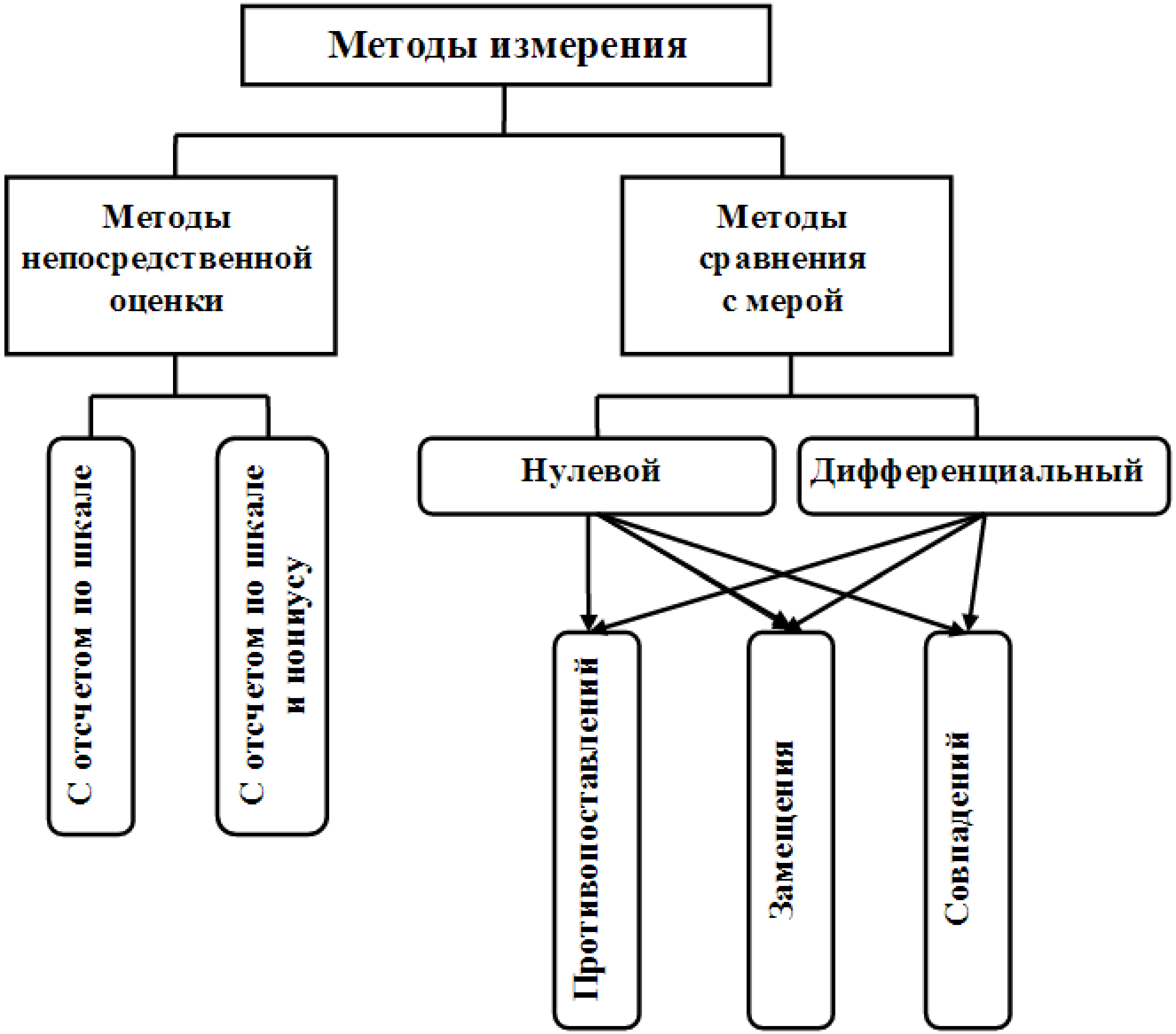


Рис. 1.3. Классификация методов измерения

Методы измерений

Прямые измерения являются наиболее распространёнными и служат основой для более сложных видов измерений.

Различают два метода прямых измерений: метод непосредственной оценки и метод сравнения с мерой.

Мера – средство измерений, предназначенное для воспроизведения физической величины заданного размера. Например: гиря – мера массы.

Метод непосредственной оценки (отсчёта) – метод измерений, в котором значение величины определяют непосредственно по отсчётному устройству ИП прямого действия. (Прибор прямого действия – ИП, в котором сигнал измерительной информации движется в одном направлении с входа на выход). Например: линейка, штангенциркуль, жидкостный манометр.

Метод сравнения с мерой – метод измерения, в котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой.

Метод сравнения с мерой подразделяют на нулевой и дифференциальный в зависимости от наличия или отсутствия при сравнении разности между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой.

Нулевой метод – это метод сравнения с мерой, в котором результирующий эффект воздействия величин на прибор сравнения доводят до нуля.

К приборам, принцип работы которых основан на нулевом (компенсационном) методе относятся автоматические потенциометры, уравновешенные мосты и др. Простейший прибор сравнения – равноплечные весы.

Дифференциальный метод – это метод сравнения с мерой, в котором на ИП воздействует разность между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой (газоанализаторы, неуравновешенные мосты).

Как в нулевом, так и в дифференциальном методе могут быть выделены методы противопоставления, замещения и совпадения.

Метод противопоставления – метод, в котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, одновременно воздействуют на прибор сравнения, с помощью которого устанавливается соотношение между этими величинами.

Метод замещения – метод, в котором измеряемую величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой.

Метод совпадений – метод, в котором разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов (стрелочные весы).

Погрешности измерений

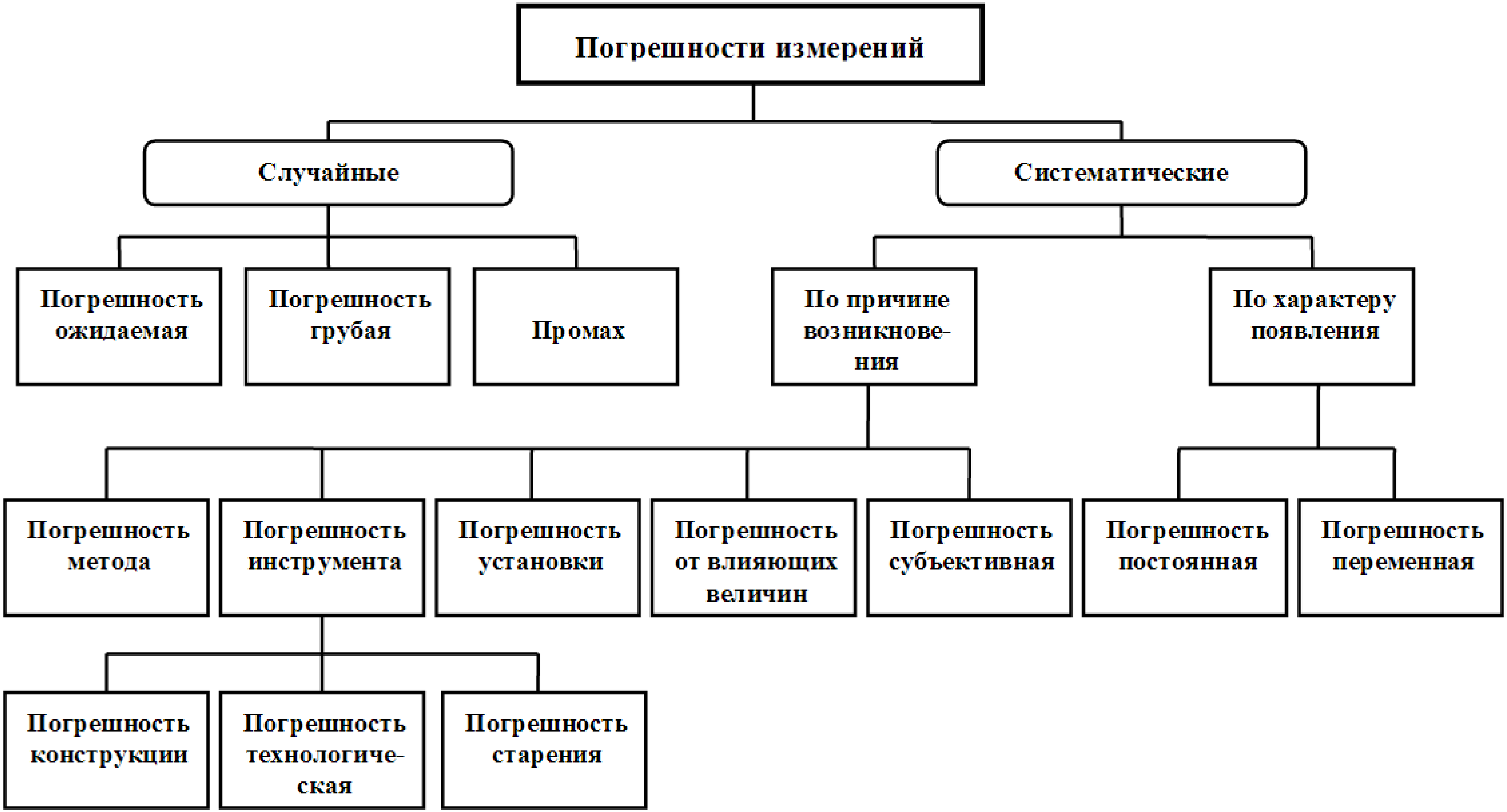


Рис. 1.4. Классификация погрешностей измерений

Погрешности измерений

В зависимости от причин возникновения, характера и условий появления принято выражать погрешность измерения Δ суммой двух составляющих, называемых случайной (ψ) и систематической (θ) погрешностями измерений:

$$\pm\Delta = \psi + \theta. \tag{1.9}$$

Случайная погрешность измерения – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Случайная погрешность определяется факторами, появляющимися нерегулярно с изменяющейся интенсивностью. Она не может быть исключена из результата измерений. Однако проведением ряда повторных измерений с использованием для их обработки методов математической статистики определяют значение измеряемой величины со случайной погрешностью.

Ожидаемая случайная погрешность – это погрешность, которая получается в результате специально созданных условий измерения, характеризующихся тем, что интенсивность всех действующих факторов доводится до некоторого уровня, обеспечивающего более или менее равное влияние на формирование погрешности.

Грубой случайной погрешностью называют погрешность измерения, существенно превышающую ожидаемую при данных условиях.

Причинами грубых погрешностей могут являться неисправность СИ, резкое изменение условий измерений и влияющих величин.

Промах – погрешность измерения, которая явно и резко искажает результат.

Промах является случайной субъективной ошибкой. Его появление – следствие неправильных действий экспериментатора.

Грубые погрешности и промахи обычно исключаются из экспериментальных данных, подлежащих обработке.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

Выявление и оценка систематической погрешности является наиболее трудным моментом любого измерения. Обнаруженная и оцененная систематическая погрешность исключается из результата измерения введением поправки.

Погрешность метода измерений – обусловлена несовершенством метода измерений.

Инструментальная погрешность измерения – зависит от погрешности применяемых СИ и состоит из трёх составляющих (погрешность конструкции, технологическая, старения).

Погрешность установки – является следствием неправильности монтажа средств измерения.

Погрешность от влияющих величин – является следствием воздействия на объект и СИ внешних факторов (тепловых и воздушных потоков, магнитных, электрических и других полей, атмосферного давления, влажности воздуха и т.п.).

По характеру проявления погрешности делятся на постоянные и переменные погрешности.

Постоянные погрешности – не изменяют своего значения при повторных измерениях. Например: неправильная установка начала отсчёта и т.п.

Переменные погрешности – при повторных измерениях могут принимать разные значения. Причина их появления – действие внешних факторов и особенности СИ.

Вышеперечисленные погрешности могут иметь место, как при статических, так и при динамических измерениях. Погрешности, возникающие при этих измерениях, принято называть статическими и динамическими.

Классификация средств измерений

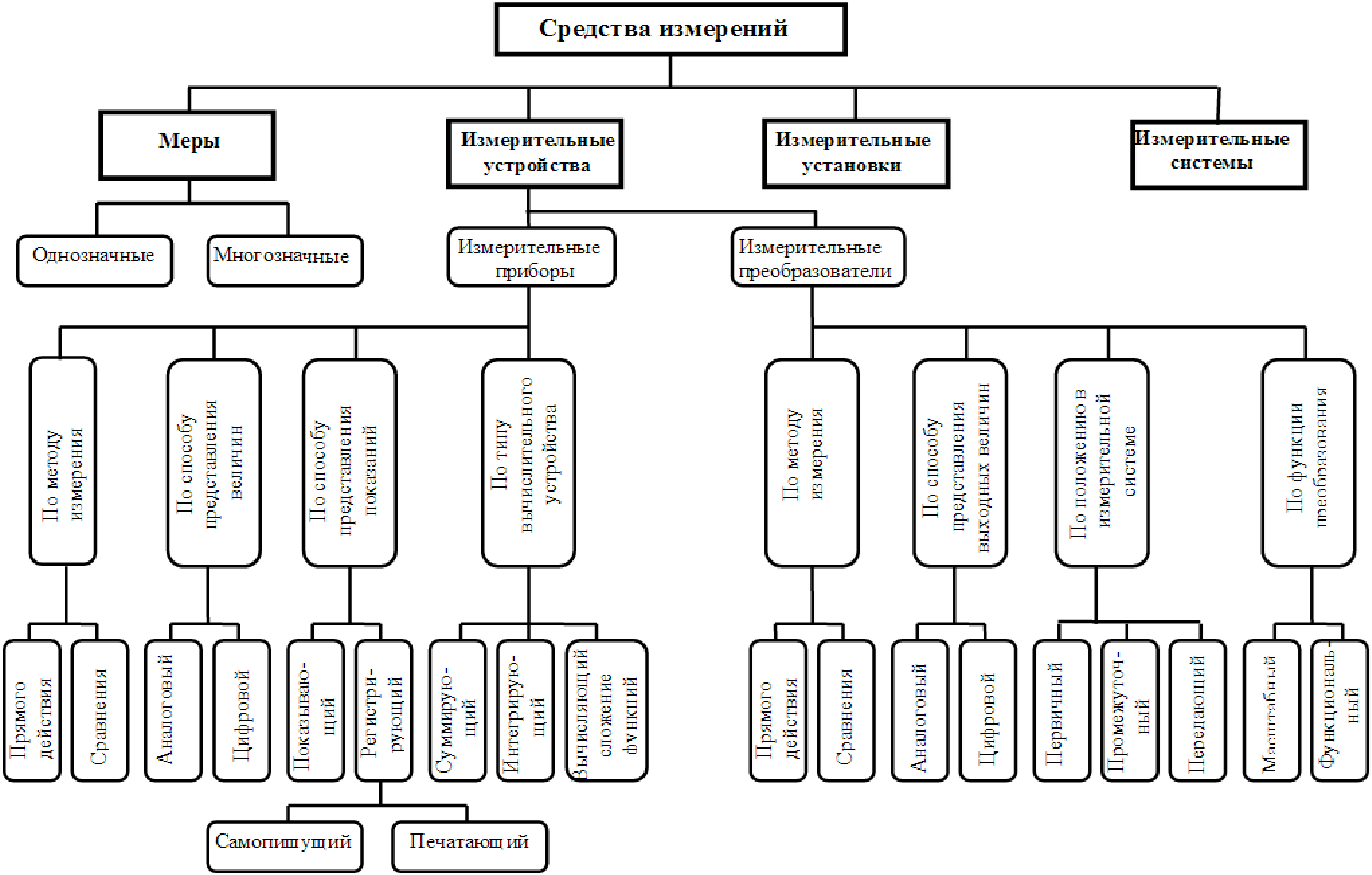


Рис. 1.5. Классификация средств измерений

В метрологии средства измерений принято классифицировать по виду и метрологическому назначению.

Различают следующие виды СИ: меры, измерительные устройства, измерительные установки и измерительные системы (рис. 1.5).

Мера – СИ, предназначенное для воспроизведения физической величины заданного размера.

Самым многочисленным видом средств измерений являются измерительные устройства (ИУ), применяемые самостоятельно или в составе измерительных установок и измерительных систем.

В зависимости от формы представления сигнала измерительной информации ИУ подразделяют на измерительные приборы (ИП) и измерительные преобразователи (ИПр).

Измерительный прибор – СИ, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателем, в установленном диапазоне и с установленной погрешностью.

Аналоговый ИП – ИП, показания которого являются непрерывной функцией измеряемой величины.

Цифровой ИП – ИП, автоматически вырабатывающий дискретные сигналы измерительной информации, показания которого представлены в цифровой форме.

Классификация средств измерений

Измерительный преобразователь – СИ, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для дальнейшего преобразования, обработки и (или) хранения, но не поддающийся непосредственному восприятию наблюдателю.

Масштабный ИПр предназначен для изменения измеряемой величины в заданное число раз (усилитель).

Функциональный ИПр предназначен для формирования сигнала измерительной информации, связанного с измеряемой величиной некоторой заданной функцией.

Измерительная информация представляется ИПр обычно в виде сигналов постоянного или переменного тока или напряжения, последовательности прямоугольных импульсов, давления сжатого воздуха или жидкости и т.п.

Измерительная установка – совокупность функционально объединенных СИ и вспомогательных устройств, предназначенных для выработки сигналов измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия наблюдателем.

Измерительная система – совокупность СИ и вспомогательных устройств, соединенных между собой каналами связи, предназначенная для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для автоматической обработки, передачи и (или) использования в автоматических системах управления, а также в форме удобной для восприятия наблюдателем.

Существенной с позиций метрологии является классификация СИ по метрологическому назначению, в соответствии с которой принято различать эталонные и рабочие СИ.

Эталон – это устройство, обеспечивающее воспроизведение и (или) хранение единиц с целью передачи информации о ее размере СИ, выполненное по особой спецификации и официально утвержденное в установленном порядке в качестве эталона.

Рабочее средство измерения – средство, применяемое для измерений, не связанных с передачей размера единиц – это все многообразие ИП, ИПр, измерительных установок и систем, применяемых во всех областях деятельности человека.

Рабочий эталон – средство, предназначенное для поверки (калибровки) по ним рабочих СИ и утвержденное в качестве рабочего эталона.

Классификация средств измерений

Закон РФ об обеспечении единства измерений трактует понятие поверки и калибровки СИ следующим образом.

Поверка СИ – совокупность операций, выполняемых органами государственной метрологической службы (другими уполномоченными на то органами, организациями) с целью определения и подтверждения соответствия метрологических характеристик СИ установленным техническим требованиям.

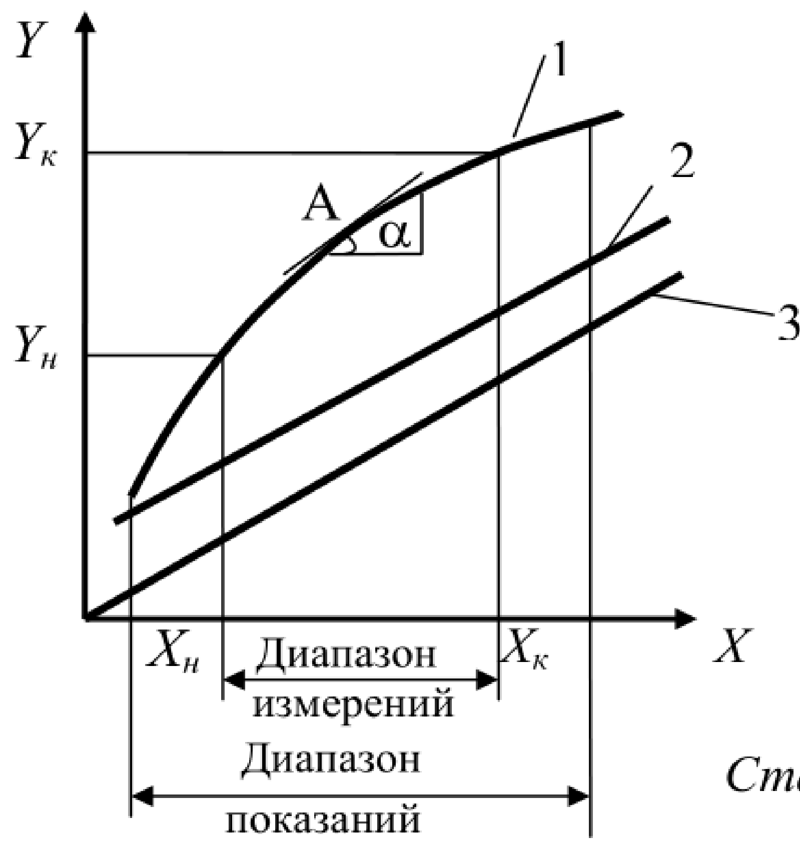
Калибровка СИ – совокупность операций, выполняемых с целью определения и подтверждения действительных значений метрологических характеристик и пригодности к применению СИ, не подлежащих государственному метрологическому контролю и надзору.

Статические характеристики и другие параметры измерительных устройств

Поверка и калибровка всех измерительных устройств связаны с определением их реальных статических характеристик, под которыми понимается зависимость выходной величины от входной. В общем случае режим работы ИУ, при котором значение входного X и выходного Y сигналов не изменяются, называют статическим.

Статической характеристикой ИУ называют функциональную зависимость выходного сигнала Y от входного X в статическом режиме работы указанного ИУ. Статическая характеристика описывается в общем случае некоторым уравнением преобразования:

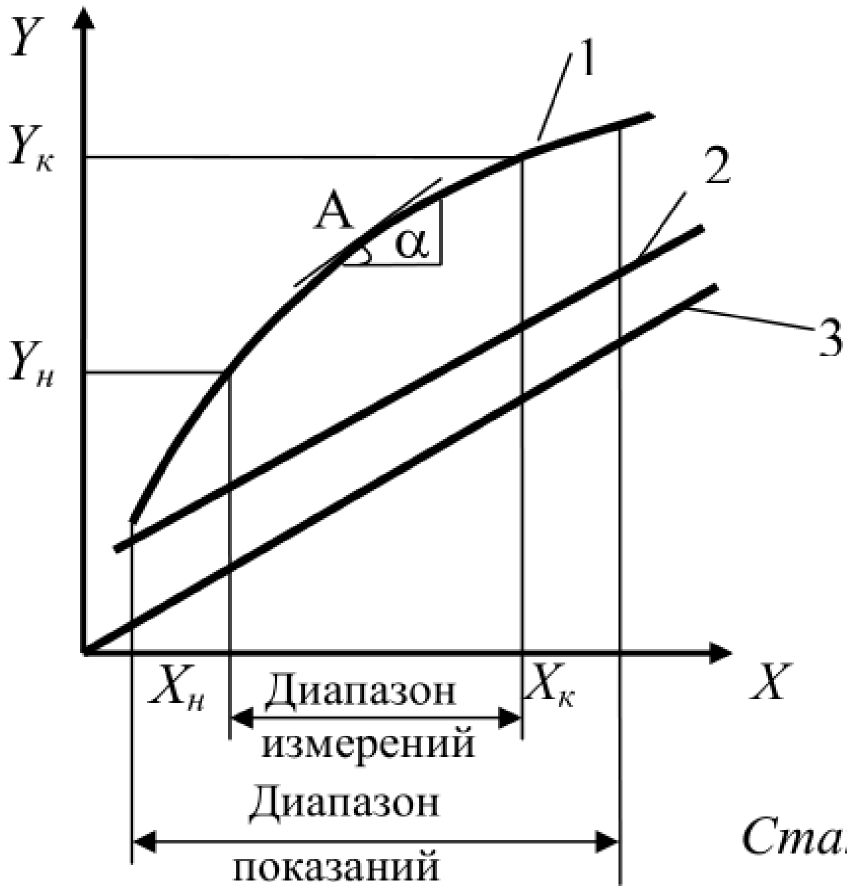
$$Y = f(X). \qquad (10)$$



Статические характеристики ИУ

Статические характеристики и другие параметры измерительных устройств

Основное требование, предъявляемое к статической характеристике ИУ, сводится к получению линейной зависимости между выходной и входной величинами. При нелинейной (1) статической характеристике чувствительность будет различной в разных точках, а шкала неравномерной. Приборы с линейной (2) или пропорциональной (3) статической характеристикой имеют неизменную в любой точке чувствительность и равномерную шкалу.



У измерительных преобразователей статическая характеристика, как правило, является линейной:

$$\boldsymbol{Y = \kappa \cdot X}, \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ – коэффициент преобразования (в АСУ – коэффициент передачи), определяемый как отношение сигнала на выходе измерительного преобразователя, к вызывающему его сигналу на входе измерительного преобразователя.

Статические характеристики ИУ

Статические характеристики и другие параметры измерительных устройств

Кроме статической характеристики для определения метрологических свойств ИУ используется ряд параметров и понятий.

Диапазон показаний – область значений шкалы, ограниченная конечным $X_к$ и начальным значением шкалы $X_к$.

Диапазон измерений (рабочая часть шкалы) – область значений измеряемой величины, для которой нормированы допускаемые погрешности ИП. В частном случае указанные диапазоны могут совпадать.

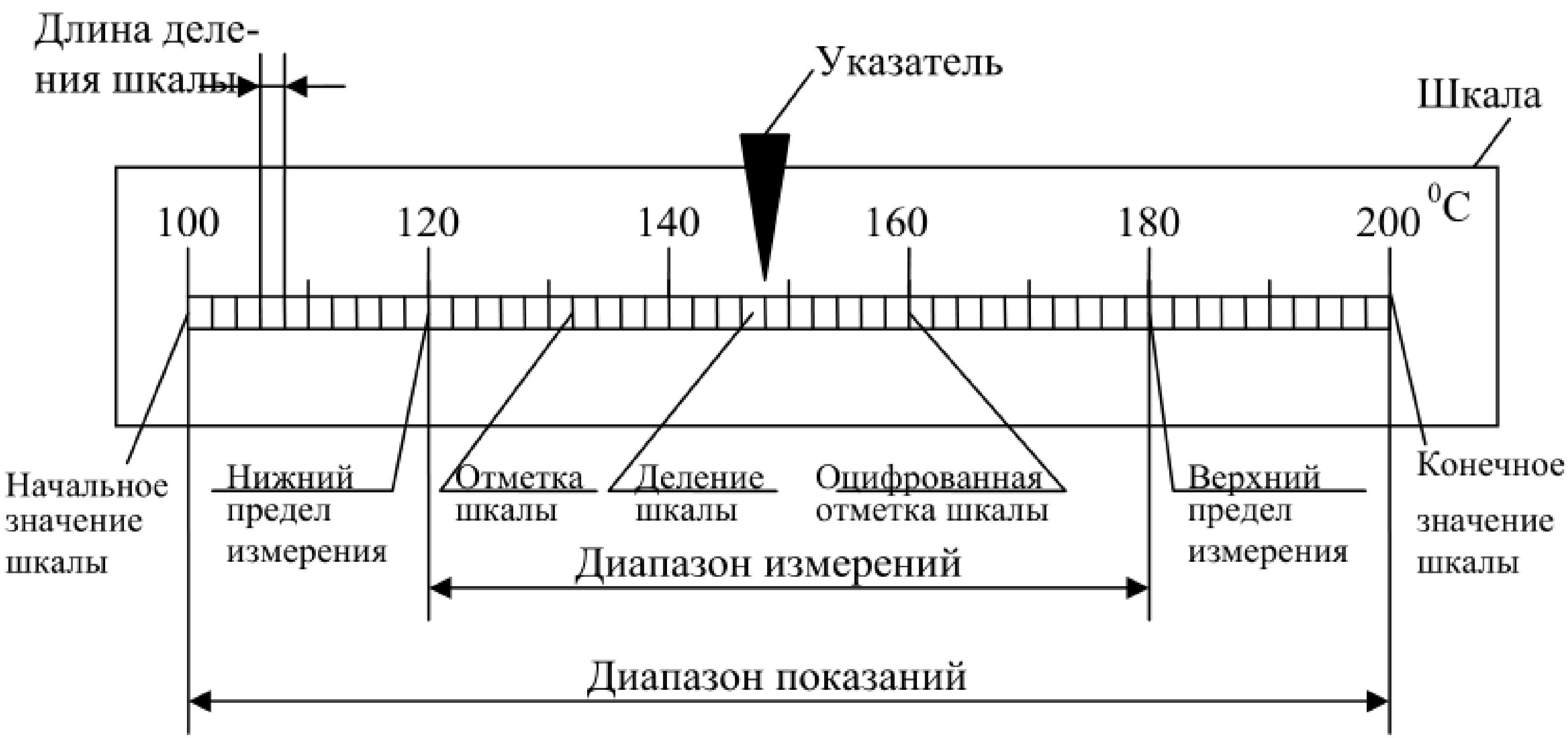


Схема отсчетного устройства ИП

Статические характеристики и другие параметры измерительных устройств

Для количественной оценки влияния на выходной сигнал ИУ входного сигнала в произвольной точке статической характеристики служит предел отношения приращения ΔY выходного сигнала к приращению ΔX входного сигнала, когда $\Delta X \to 0$, т.е. производная в выбранной точке:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{dY}{dX}. \qquad (12)$$

Применительно к ИП этот параметр называют чувствительностью прибора. Графически чувствительность определяется тангенсом угла наклона α касательной, проведенной к выбранной точке А статической характеристики.

Цена деления однозначно связана с числом делений «n» шкалы ИП. Число делений связано с допускаемой погрешностью ИП, обычно представляемой его классом точности K. Число делений ИП, как правило, в первом приближении определяется из соотношения: $$n \geq \frac{100}{2K}. \qquad (13)$$

При выполнении данного условия «n» выбирается таким образом, чтобы цена деления составляла целое число единиц измеряемой величины.

Под порогом чувствительности понимают то наименьшее значение входного сигнала, которое вызывает уверенно фиксируемое изменение выходного сигнала. Порог чувствительности $\approx K$.

Погрешности измерительных устройств

Погрешности измерительных устройств

Инструментальная погрешность (погрешность измерительного устройства) имеет определяющее значение для наиболее распространенных технических измерений.

В понятие систематической и случайной статической и динамической погрешности ИУ вложен тот же смысл, что и в понятия погрешностей измерения.

Основной погрешностью ИУ называют погрешность, которая получается при использовании его в нормальных условиях. Как правило, за нормальные условия принимают температуру окружающей среды равную $\boldsymbol{t_{OC}}$ = (20±2) ^{0}С; атмосферное давление равное $\boldsymbol{P_{AT}}$ = 760 мм. рт. ст.; заданное напряжение питания; нормальное рабочее положение и т.д. Нормальные условия применения указываются в стандартах или технических условиях на ИУ.

Дополнительной погрешностью ИУ называют изменение его погрешности, вызванной отклонением одной из влияющих физических величин от ее нормативного значения или выходом ее за пределы нормальной области значений.

Погрешности измерительных устройств

Иными словами, дополнительная погрешность – это часть погрешности, которая добавляется (алгебраически складывается) к основной в случаях, когда ИУ применяется в рабочих (эксплуатационных) условиях. Например: температурная погрешность, вызванная отклонением температуры окружающего воздуха от нормального значения; погрешность установки, обусловленная отклонением положения прибора от рабочего, отклонение напряжения питания от его номинального значения и т.п.

В зависимости от формы представления погрешности измерительных устройств подразделяются на абсолютные, относительные и приведенные.

Абсолютной погрешностью измерительного прибора Δ называют разность показаний прибора $X_П$ и действительного значения $X_Д$ измеряемой величины:

$$\pm\Delta = X_П - X_Д, \qquad (14)$$

где $X_П = X_Н;\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_m\ \ldots\ X_К$ – показания прибора.

Действительное значение $X_Д$ определяется с помощью рабочих эталонов или по номинальным статическим характеристикам ИУ.

Погрешности измерительных устройств

Относительной погрешностью ИП называют отношение абсолютной погрешности ИП к действительному значению измеряемой величины. Она выражается в %:

$$\pm\delta = \pm\frac{\Delta}{X_Д}\cdot 100. \qquad (15)$$

Так как абсолютная погрешность $\pm\Delta << X_Д$, $X_Д \approx X_П$, то относительную погрешность можно рассчитать и по формуле:

$$\delta = \pm\frac{\Delta}{X_П}\cdot 100. \qquad (16)$$

Приведенной погрешностью ИП называют отношение абсолютной погрешности ИП к нормирующему значению X_N Приведенную погрешность также выражают в процентах:

$$\gamma = \pm\frac{\Delta}{X_N}\cdot 100. \qquad (17)$$

Погрешности измерительных устройств

Нормирующее значение X_N – условно принятое значение, которое чаще всего равно диапазону показаний ИП $X_N = X_K - X_H$.

Суть погрешности в зависимости от формы представления для измерительных преобразователей та же, что и для ИП. Однако для определения их погрешности необходимо знать НСХ функции прямого и обратного преобразования (градуированную характеристику) $Y = f(x)$.

Для рассмотрения зависимости погрешности ИУ от значения измеряемой величины используются понятия номинальной и реальной функции преобразования ИУ.

Номинальной (или идеальной) функцией преобразования называют функцию преобразования, которая приписана ИУ данного типа, указана в его паспорте и используется при выполнении измерений и проверке (калибровке).

Реальной функцией преобразования называют ту функцию преобразования, которой обладает конкретный экземпляр ИУ данного типа. Из-за несовершенства технологии они, как правило, отличаются друг от друга.

По принципу отклонения реальной характеристики от номинальной погрешности принято разделять на аддитивную, мультипликативную и гистерезисную.

Погрешности измерительных устройств

Аддитивной или погрешностью нуля ИУ, называют погрешность, которая остается постоянной при всех значениях измеряемой величины. В этом случае (рис. 10, *а*) реальная функция преобразования $\boldsymbol{Y = f_P(X)}$ несколько смещена относительно номинальной $\boldsymbol{Y = f_H(X)}$, т.е. выходной сигнал ИУ для всех значений измеряемой величины $\boldsymbol{X}$ будет больше (или меньше) на одну и ту же величину, чем он должен быть, в соответствии с номинальной функцией преобразования.

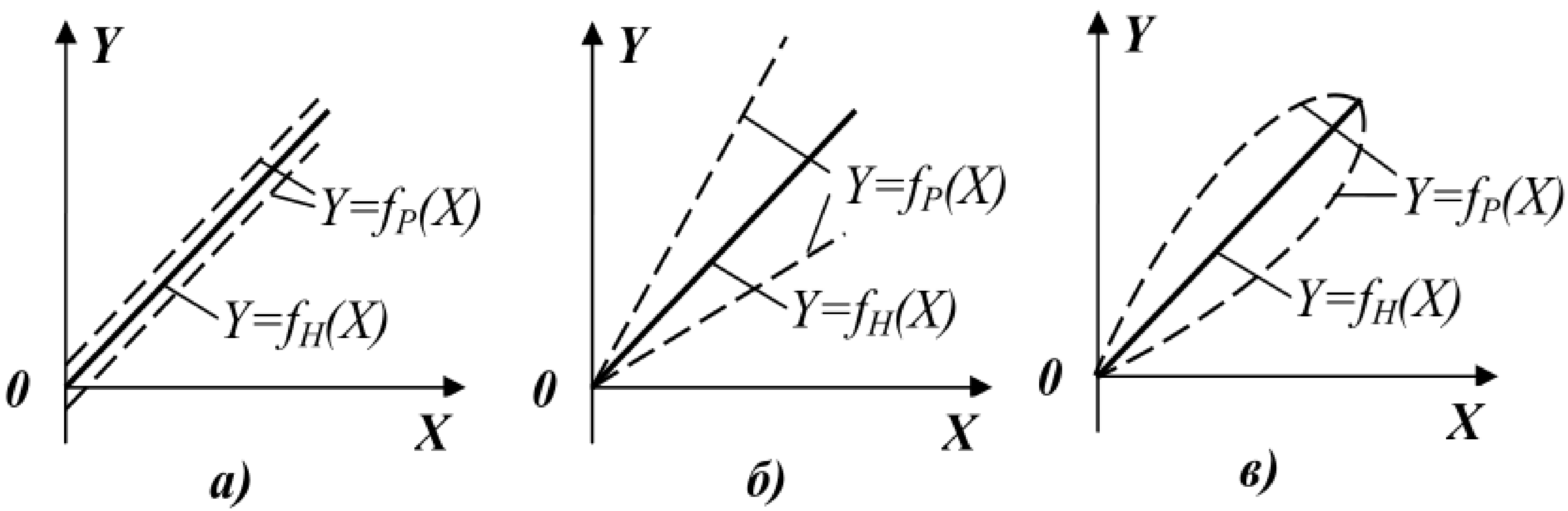


Рис. 10. Реальные и номинальные функции преобразования ИУ

Погрешности измерительных устройств

Систематическая аддитивная погрешность устраняется с помощью специального корректора нуля. Случайную аддитивную погрешность исключить из результата измерения нельзя, но можно определить некоторую полосу, ширина которой остается постоянной при всех значениях измеряемой величины (рис. 10, *а*).

Возникновение случайной аддитивной погрешности вызывается трением в опорах, контактными сопротивлениями, дрейфом нуля, шумом и фоном измерительного устройства.

Мультипликативной или погрешностью чувствительности ИУ называют погрешность, которая линейно возрастает (или убывает) с увеличением измеряемой величины.

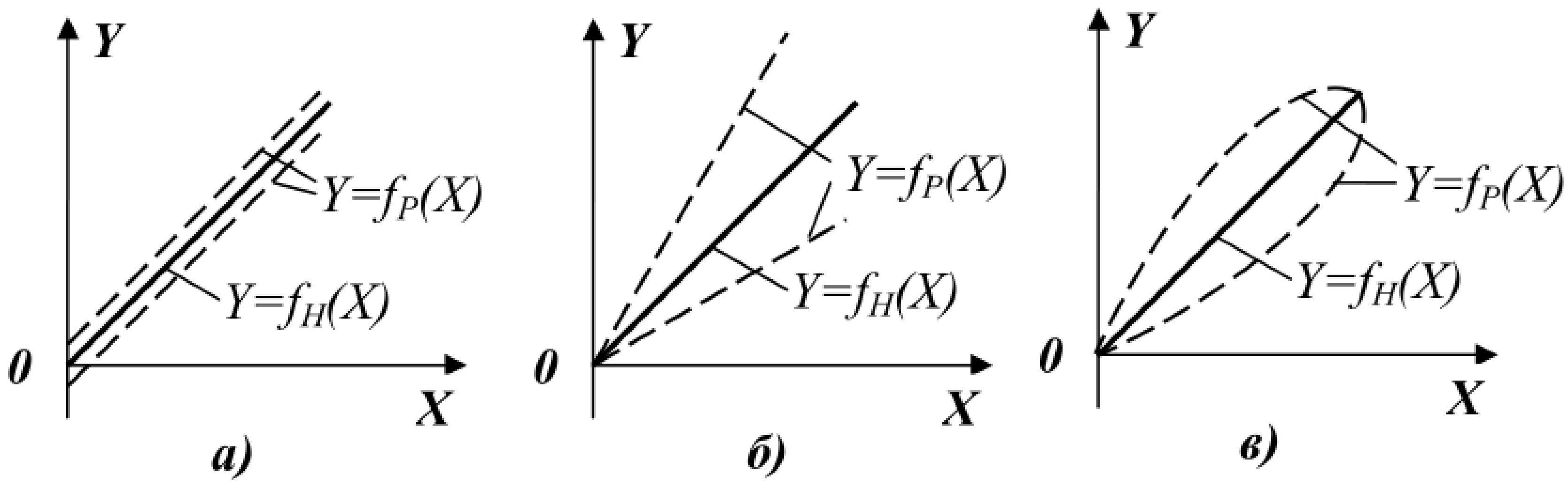


Рис. 10. Реальные и номинальные функции преобразования ИУ

Погрешности измерительных устройств

Графически появление мультипликативной погрешности интерпретируется (рис. 10, *б*) поворотом реальной функции преобразования $\boldsymbol{Y_P = f_P(X)}$ относительно номинальной $\boldsymbol{Y = f_H(X)}$. Причиной возникновения случайной мультипликативной погрешности является изменение коэффициента преобразования отдельных элементов и узлов ИУ. Если мультипликативная погрешность является случайной, то реальная функция преобразования представляется полосой, ширина которой с увеличением измеряемой величины увеличивается (рис. 10, *б*).

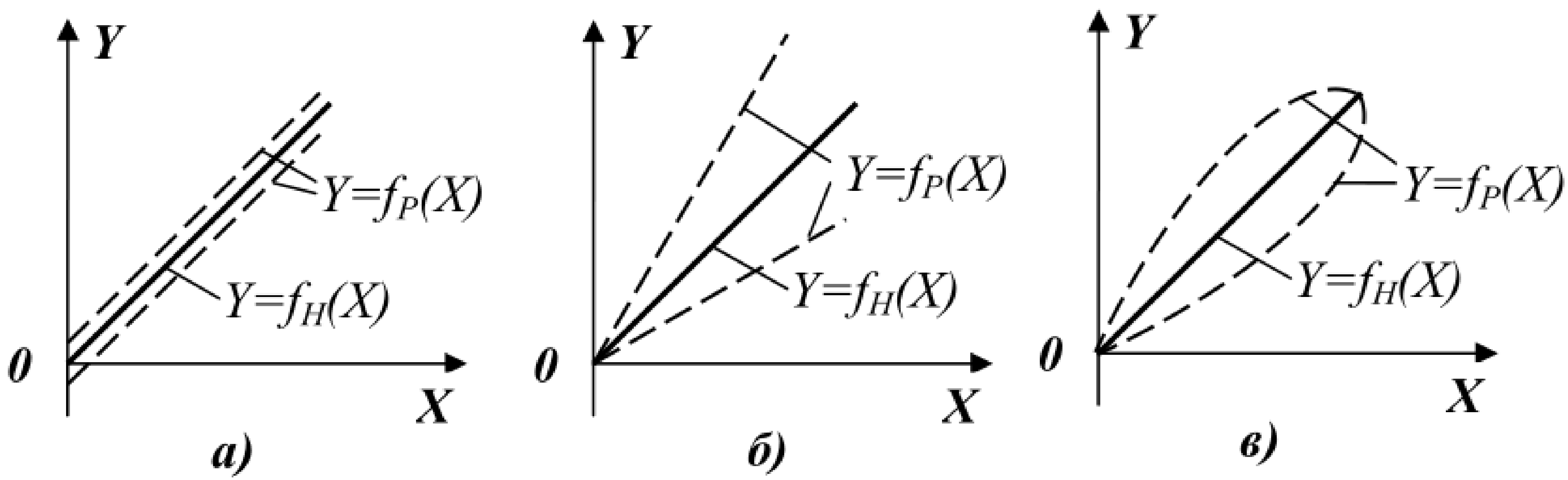


Рис. 10. Реальные и номинальные функции преобразования ИУ

Погрешности измерительных устройств

Наиболее существенной и трудноустранимой систематической погрешностью ИУ является погрешность гистерезиса или погрешность обратного хода, выражающаяся в несовпадении (рис. 10, *в*) реальной функции преобразования ИУ при увеличении (прямой ход) или уменьшении (обратный ход) измеряемой величины.

Причинами гистерезиса могут быть люфт и сухое трение в механических передающих элементах, внутреннее трение в металлах пружин, явление упругого последействия в упругих чувствительных элементах, явление поляризации в электрических элементах и т.п.

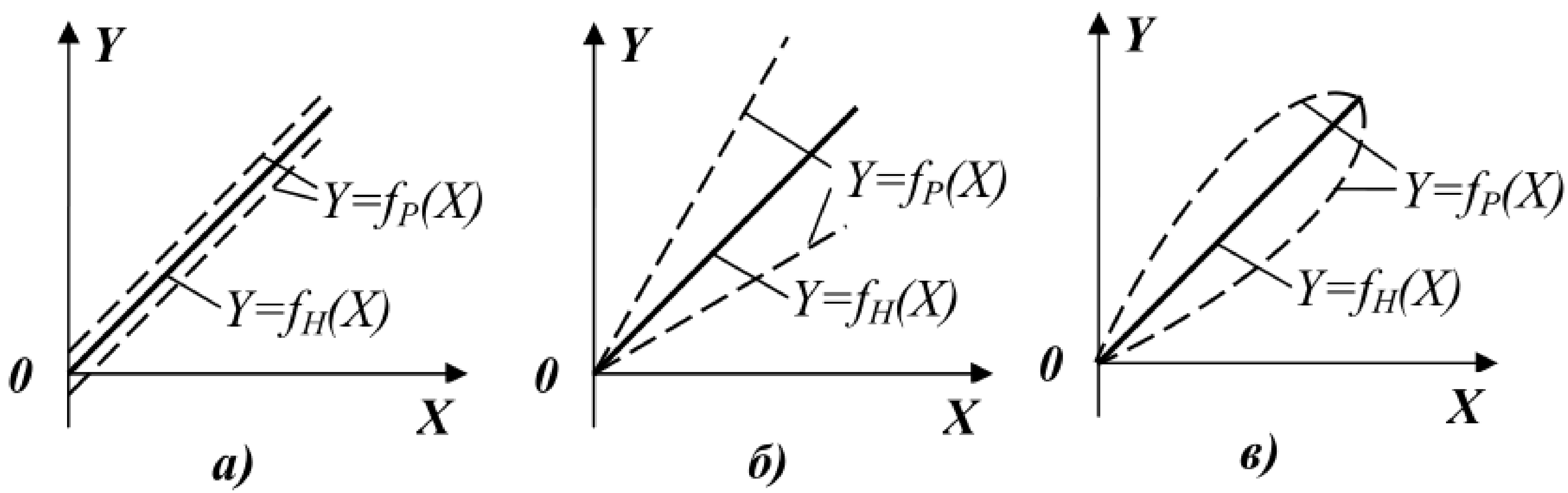


Рис. 10. Реальные и номинальные функции преобразования ИУ

Погрешности измерительных устройств

Для количественной оценки погрешности гистерезиса используется понятие вариация.

Вариацией (*V*) ИУ называют среднюю разность между значениями выходного сигнала, соответствующую одному и тому же значению измеряемой величины, полученную при многократном и двухстороннем подходе к этому значению, т.е. при прямом и обратном ходе указателя.

Разность показаний ИП в одной и той же точке при прямом и обратном ходе указателя называется вариацией.

Абсолютное значение вариации для измерительных приборов в единицах измеряемой величины V_X и преобразователей в единицах выходного сигнала V_Y определяется соответственно по формулам:

$$V_X = X_{пр} - X_{обр}\,, \qquad (18)$$

$$V_Y = Y_{пр} - Y_{обр}\,, \qquad (19)$$

где $X_{пр}$ и $X_{обр}$ – показания измерительного прибора в одной и той же точке при прямом и обратном ходе указателя;

$Y_{пр}$ и $Y_{обр}$ – выходной сигнал измерительного преобразователя при прямом и обратном ходе в одной и той же точке.

Погрешности измерительных устройств

Абсолютное значение вариации для измерительных приборов в единицах измеряемой величины V_X и преобразователей в единицах выходного сигнала V_Y определяется соответственно по формулам:

$$V_X = X_{пр} - X_{обр}\ , \qquad (18)$$

$$V_Y = Y_{пр} - Y_{обр}\ , \qquad (19)$$

где $X_{пр}$ и $X_{обр}$ – показания измерительного прибора в одной и той же точке при прямом и обратном ходе указателя;

$Y_{пр}$ и $Y_{обр}$ – выходной сигнал измерительного преобразователя при прямом и обратном ходе в одной и той же точке.

Приведенное значение вариации для измерительных приборов W_X и преобразователей W_Y определяется соответственно по формулам:

$$W_x = \frac{V_X}{X_N} \cdot 100 = \frac{X_{пр} - X_{обр}}{X_B - X_H} \cdot 100. \qquad (20)$$

$$W_y = \frac{V_Y}{X_N} \cdot 100\% = \frac{Y_{пр} - Y_{обр}}{Y_B - Y_H} \cdot 100. \qquad (21)$$

Нормирование метрологических характеристик ИУ

Статические и динамические характеристики, а также погрешности ИУ принято называть метрологическими характеристиками, так как они влияют на точность измерений проводимых с помощью этих ИУ.

ИУ допускается к применению в том случае, когда нормированы их метрологические характеристики. Сведения о метрологических характеристиках приводятся в технической документации на ИУ.

Посредством нормирования метрологических характеристик ИУ обеспечивается взаимозаменяемость ИУ и единство измерений в государственном масштабе.

Нормируются следующие метрологические характеристики ИУ.

1. Характеристики, предназначенные для определения результата измерений: функция преобразования, коэффициент преобразования, цена деления, чувствительность, диапазон измерений, верхний и нижний пределы измерений, диапазон показаний, конечные и начальные значения шкалы.

2. Характеристики погрешности: систематическая погрешность, случайная погрешность, динамическая погрешность, мультипликативная погрешность, аддитивная погрешность, абсолютная, относительная и приведенная погрешность, а самая главное основная погрешность и вариация.

3. Характеристики чувствительности к влияющим величинам: изменение показаний, изменение коэффициента преобразования, функция влияния, дополнительная погрешность, иногда размах.

Нормирование метрологических характеристик ИУ

Выбор нормируемых метрологических характеристик из числа вышеперечисленных зависит от вида ИУ и осуществляется в процессе разработки, освоения производства и аттестации ИУ данного типоразмера.

Реальные значения метрологических характеристик ИУ определяются при их выпуске, а затем периодически проверяются в процессе эксплуатации, т.е. ИУ проходят через определенный промежуток времени поверку или калибровку. При отклонении хотя бы одной метрологической характеристики от нормы ИУ ремонтируют или бракуют.

Основная погрешность измерительного устройства нормируется путем установления предела допускаемой основной соответственно абсолютной, относительной или приведенной погрешности:

$$\Delta_{доп} = \pm a, \qquad (22)$$

$$\delta_{доп} = \pm \frac{\Delta_{доп}}{X_Д} \cdot 100; \qquad (23)$$

$$\gamma_{доп} = \pm \frac{\Delta_{доп}}{X_N} \cdot 100. \qquad (24)$$

Нормирование метрологических характеристик ИУ

Значение предела допускаемой основной абсолютной, относительной или приведенной погрешностей определяется из ряда предпочтительных чисел:

$$\mathbf{(1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 4;\ 5;\ \ 6)\cdot 10^{\mathit{n}}}, \qquad (25)$$

где $\boldsymbol{n}$ = +1, 0, –1, –2 и т. д.

Обобщенной метрологической характеристикой ИУ является класс точности.

Класс точности ИУ – это обобщенная характеристика, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами ИУ, отражающими уровень их точности, значения которых устанавливается в стандартах на отдельные виды ИУ.

Класс точности ИУ – это обобщенная характеристика ИУ, отражающая уровень их точности и представленная набором нормируемых метрологических характеристик. Например, пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами ИУ, влияющих на точность.

Класс точности ИУ – обобщенная характеристика ИУ определяемая пределом допускаемой основной погрешности, отражающая уровень их точности, при нормальных условиях эксплуатации.

Нормирование метрологических характеристик ИУ

Кроме класса точности, уровень точности ИУ представлен набором других нормируемых метрологических характеристик, связанных определенными соотношениями с классом точности, таких как: пределы допускаемых дополнительных погрешностей и вариация.

Если для ИУ погрешность не зависит от значения измеряемой величины, т.е. является аддитивной, то класс точности равен:

$$K = \pm \gamma_{доп} \% = \pm a \% . \qquad (26)$$

В этом случае класс точности обозначается на шкале прибора 1,5 или 2,5 , тогда шкала прибора неравномерна.

Рис. 11. Поле допускаемых приведенных погрешностей

Нормирование метрологических характеристик ИУ

Если погрешность ИУ является мультипликативной, т.е. зависит от значений измеряемой величины, то класс точности равен:

$$K = \pm\delta_{доп}\% = \pm b\% \,. \qquad (27)$$

В этом случае класс точности обозначается на шкале прибора 1.5.

Если на измерительном приборе указан дробный класс точности, например $\boldsymbol{K}$ = 0,02/0,01 = ($\boldsymbol{c/d}$), то предел основной допускаемой абсолютной погрешности можно определить по формуле:

$$\Delta_{доп} = \pm\left(0{,}02 + 0{,}01\cdot\left[\frac{X_K}{X} - 1\right]\right)\frac{X}{100}, \qquad (28)$$

а предел допускаемой основной относительной погрешности по формуле:

$$\pm\delta_{доп} = \Delta / X = \pm\left(c + d\cdot\left[\frac{x_n}{x} - 1\right]\right), \qquad (29)$$

где $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ – соответственно числитель и знаменатель в обозначении класса точности; $X_к$ – больший (по модулю) из пределов измерений (предел измерений); X – показание прибора.

Нормирование метрологических характеристик ИУ

Следовательно, класс точности ИУ характеризует предел допускаемой основной абсолютной, приведенной или относительной погрешности, но не характеризует точность измерения.

Дополнительная погрешность нормируется в тех случаях, когда при изменении влияющих величин в рабочей области, допускаемая основная погрешность превышает установленный для нее предел.

При нормировании стабильности показаний при прямом и обратном ходе для ИП и ИПр устанавливают предел допускаемой вариации, значение которого чаще всего числено равен половине или полному пределу допускаемой абсолютной или приведенной погрешности, т.е.

$$
\begin{aligned}
V_{доп} &= \left[\left(0{,}5 \div 1\right) \Delta_{доп} \right], \\
W_{доп} &= \left(0{,}5 \div 1\right) \gamma_{доп},
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

Допускаемая вариация, а равно и текущая, знака не имеет. Так как она в поле допускаемых погрешностей может располагаться в любом месте. Вариация для ряда измерительных приборов и преобразователей не всегда нормируется.

Оценка и учет погрешностей при точных измерениях

Основной постулат метрологии – отсчет является случайным числом.

При выполнении точных измерений пользуются средствами измерений повышенной точности, а вместе с тем применяют и более совершенные методы измерений. Во всяком измерении имеются случайные погрешности. Поэтому вместо истинного значения измеряемой величины, принимается некоторое среднее арифметической значение (математическое ожидание). При большом числе измерений, как показывает теория вероятности и математической статистики, у нас есть обоснованная уверенность считать, что математическое ожидание является наилучшим приближением к истинному значению.

Теория случайных погрешностей основывается на двух аксиомах, базирующихся на опытных данных.

Аксиома случайности – при очень большом числе измерений случайные погрешности, равные по величине, но различные по знаку встречаются одинаково часто, т. е. число отрицательных погрешностей равно числу положительных.

Аксиома распределения – малые погрешности случаются чаще, чем большие. Очень большие погрешности не встречаются.

Оценка и учет погрешностей при точных измерениях

Пусть X неизвестное истинное значение некоторой неизвестной физической величины. При измерении этой величины получено n независимых друг от друга результатов наблюдений $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Измерения выполнены одним и тем же прибором и с одинаковой тщательностью, т. е. одинаково точными и свободными от систематической погрешности. Предположим, что каждому измерению сопутствует случайная погрешность $\overset{0}{\Delta}_1$, $\overset{0}{\Delta}_2$, … $\overset{0}{\Delta}_n$ – различная по значению и по знаку. Следовательно:

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{0}{\Delta}_1 = x_1 - X \\
\overset{0}{\Delta}_2 = x_2 - X \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overset{0}{\Delta}_n = x_n - X \\
\hline
\sum\limits_{i=1}^{n} \overset{0}{\Delta}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n \cdot X
\end{array}\right\} \qquad (31)$$

где $\overset{0}{\Delta}$ – случайная величина погрешности, среднее значение которой равно нулю.

Оценка и учет погрешностей при точных измерениях

На основании аксиомы случайности можно предположить, что в выполненных измерениях число, сумма и числовые значения положительных случайных погрешностей приблизительно равны числу, сумме и значениям отрицательных погрешностей. Другими словами; распределение случайных погрешностей – равностороннее по отношению к среднему значению измеряемой величины X. Таким образом, по предположению,

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{0}{\Delta}_i = 0 \ ,$$

Отсюда $$\sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot X = 0 \ , \qquad (32)$$

и поэтому $$X \approx \overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = M. \qquad (33)$$

Это равенство позволяет считать, что среднее арифметическое значение $\overline{X}$ (математическое ожидание M) является наиболее близким к истинному значению измеряемой величины X. Чем больше число измерений n тем больше M приближается к истинному значению.

Оценка и учет погрешностей при точных измерениях

Наиболее полно свойства случайной величины описываются функцией распределения. Она устанавливает связь между возможными значениями случайной погрешности и вероятностью появления этих значений. Распределение случайных погрешностей при практических расчетах чаще всего аппроксимируют нормальной функцией, т.е. наиболее часто на практике применяется нормальный закон распределения (распределение Гаусса).

Закон нормального распределения случайных погрешностей выражается следующей функцией распределения:

$$f(\overset{0}{\Delta}) = \frac{1}{\sigma_n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\overset{0}{\Delta}^2}{2 \cdot \sigma_n^2}}, \qquad (34)$$

где $f(\overset{0}{\Delta})$ – функция распределения плотности вероятностей случайной погрешности;

σ_n – среднее квадратическое отклонение результата наблюдений при большом числе измерений ($n \to \infty$);

e = 2,7183 – основание натурального логарифма;

Оценка и учет погрешностей при точных измерениях

Графически закон распределения случайных погрешностей, выраженный уравнением (34), представляется в виде симметричной кривой, которую называют кривой нормального (Гауссовского) распределения случайных погрешностей (рис. 15).

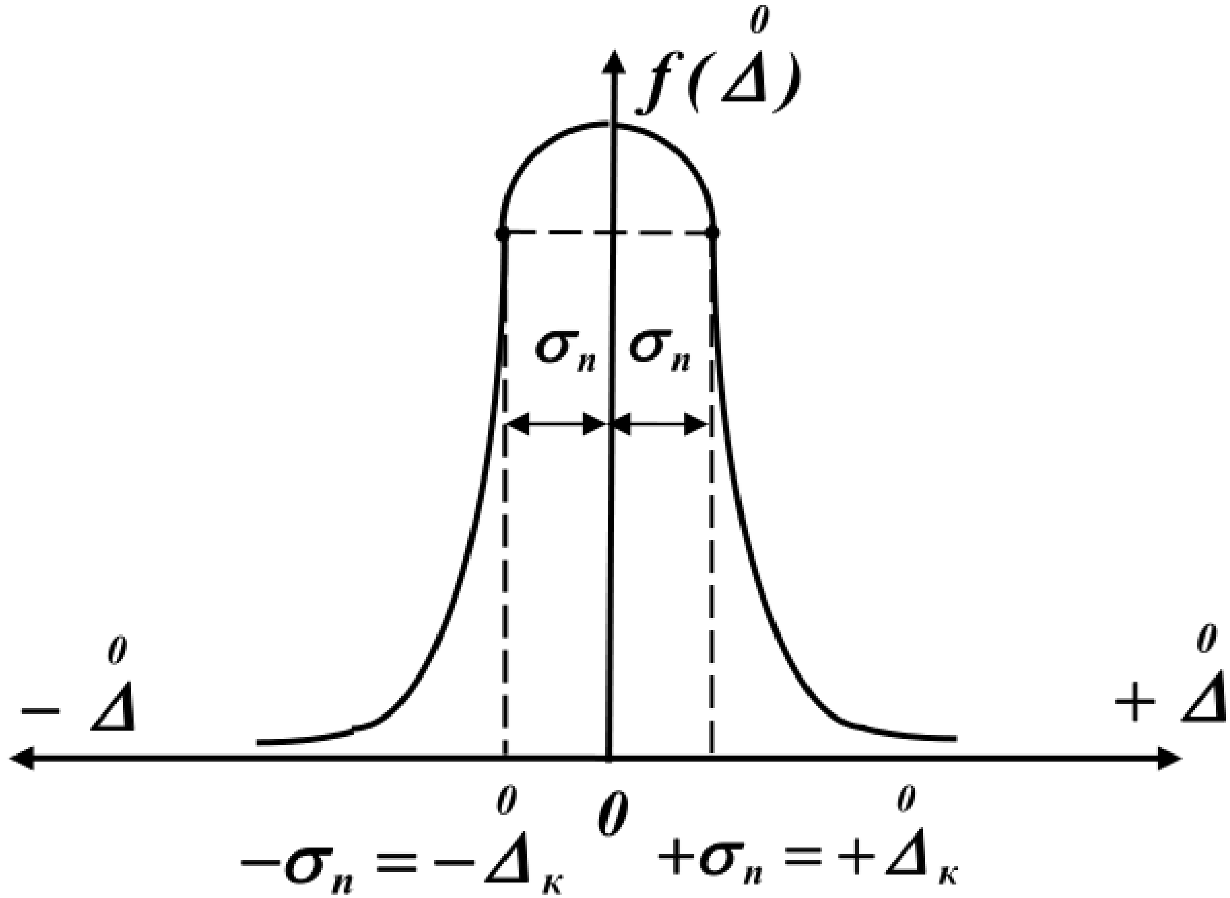


Рис. 15. Кривая нормального распределения случайных погрешностей

Оценка и учет погрешностей при точных измерениях

$$P = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{0}^{\overset{0}{\Delta}} e^{-\frac{\overset{0}{\Delta}{}^{2}}{2 \cdot \sigma_n^2}} \cdot \frac{d\overset{0}{\Delta}}{\sigma_n}. \qquad (35)$$

Произведя замену переменной $\frac{\overset{0}{\Delta}}{\sigma_n} = t$, получим:

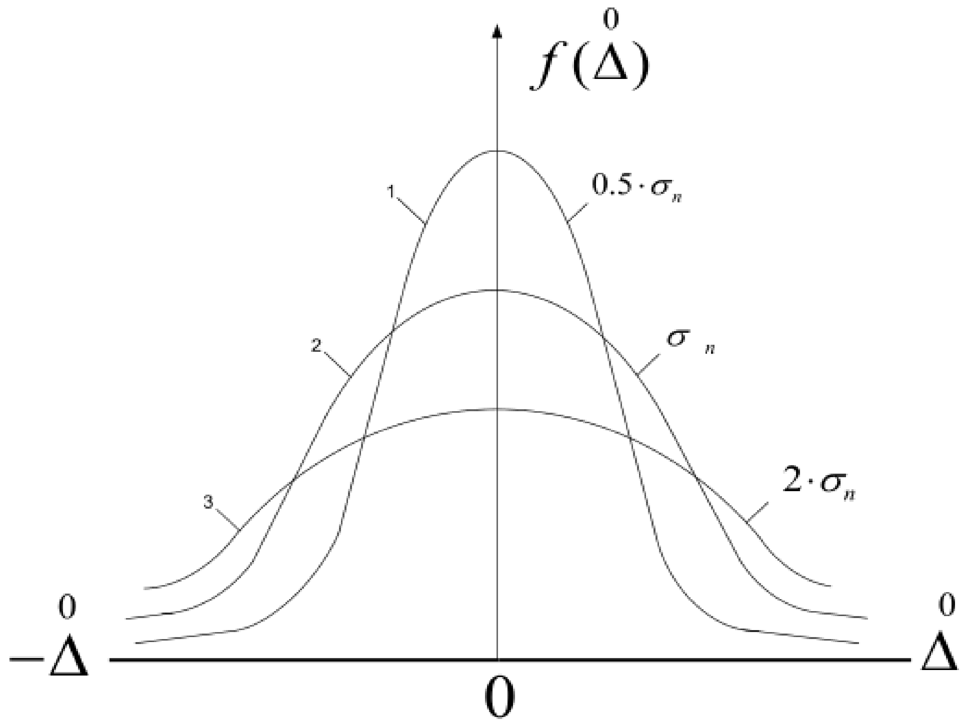
$$P = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \cdot \Phi(t). \qquad (36)$$

Отсюда нормальная функция распределения

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (37)$$

Для облегчения расчетов для $\Phi(t)$ составлены таблицы для различных значений t ($-0 < t < -3{,}8$; $-3{,}8 < t < 3{,}8$).

Оценка и учет погрешностей при точных измерениях



Параметр $\boldsymbol{\sigma_n}$ однозначно характеризует форму кривой распределения случайных погрешностей. Ордината $f(\overset{0}{\Delta})$ кривой распределения, соответствующая $\overset{0}{\Delta} = 0$ обратно пропорциональна $\boldsymbol{\sigma_n}$. Площадь под кривой всегда равна 1. Следовательно, при увеличении $\boldsymbol{\sigma_n}$ получим кривую 3, при уменьшении – 1.

Конечная цель анализа выполненных измерений состоит в определение погрешности результата наблюдения для ряда значений измеряемой величины x_1 , x_2 ,…, x_n и погрешности их среднего арифметического значения (т.е. результата измерения), принимаемого как окончательный результат измерения, с заданной вероятностью.

Оценка точности результата наблюдения

Для оценки точности результата наблюдения служит среднее квадратическое отклонение результата наблюдения σ_n. Квадрат этой величины, т.е. σ_n^2 называется рассеянием или дисперсией результата наблюдения и обозначается обычно символом D.

Так как число наблюдений конечно, то можно найти только приближенное значение σ_{x_i} или оценку этого отклонения по формуле:

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2}, \qquad (38)$$

где n – число наблюдений;

x_i – значение величины, полученное при i-м наблюдении;

$\overline{X}$ – результат измерения (среднее арифметическое значение, математическое ожидание).

Оценка точности результата наблюдения

Для получения полного представления о точности и надежности оценки случайного отклонения результата наблюдения должны быть указаны доверительные границы, доверительный интервал и доверительная вероятность.

При известном σ_{x_i} доверительные границы указывают следующим образом: нижняя граница $-\sigma_{x_i}$ или $\overline{X}-\sigma_{x_i}$, верхняя граница $+\sigma_{x_i}$ или $\overline{X}+\sigma_{x_i}$ (сокращено $\pm\sigma_{x_i}$; $\overline{X}\pm\sigma_{x_i}$), за пределы которых с вероятностью P = 0,683 (или 68.3%) не выйдут значения случайных отклонений $x_i-\overline{X}$ или результатов отдельных наблюдений x_i ряда измерений. Доверительный интервал выражается в виде:

$$I_p=(\overline{X}-\sigma_{x_i};\overline{X}+\sigma_{x_i}).$$

В зависимости от целей измерения могут задаваться и другие доверительные границы: $-t_p\sigma_{x_i}$ или $\overline{X}-t_p\sigma_{x_i}$ и $+t_p\sigma_{x_i}$ или $\overline{X}+t_p\sigma_{x_i}$.

Оценка точности результата наблюдения

В зависимости от целей измерения могут задаваться и другие доверительные границы: $-t_p\sigma_{x_i}$ или $\overline{X}-t_p\sigma_{x_i}$ и $+t_p\sigma_{x_i}$ или $\overline{X}+t_p\sigma_{x_i}$.

Значения t_p для наиболее употребительных доверительных вероятностей при $n\to\infty$ приведены в таблице 1.

Таблица 1.1 – Значения t_p для различных вероятностей при $n\to\infty$

Доверительная вероятность	$P_д$	0,683	0,9	0,95	0,98	0,99	0,9973
Значение t_p	t_p	1,000	1,645	1,960	2,330	2,580	3,000

В инженерной практике предпочтение отдается доверительной вероятности $P_д$ = 0,95 или 0,9973, т.е. для интервалов $\pm 2\cdot\sigma_{x_i}$ или $\pm 3\cdot\sigma_{x_i}$.

Оценка точности результата измерения

Для оценки достоверности результата измерения, принимаемого равным среднему арифметическому значению $\overline{X}$, применяют показатель точности, аналогичный показателю точности результата наблюдения. При этом согласно теории погрешностей оценка среднего квадратического отклонения результата измерения $\sigma_{\overline{X}}$ в $\sqrt{n}$ раз меньше оценки среднего квадратического отклонения результата наблюдения.

Таким образом, при числе измерений n оценка среднего квадратического отклонения результата измерения (среднего арифметического) будет равна:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_{x_i}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2},$$

где $\sigma_{\overline{X}}$ – среднее квадратическое отклонение результата измерения (среднего арифметического).

Оценка точности результата измерения

Оценка среднего квадратического отклонения результата измерения:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_{x_i}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2},$$

где $\sigma_{\overline{X}}$ – среднее квадратическое отклонение результата измерения (среднего арифметического).

При известном $\sigma_{\overline{X}}$ доверительные границы указывают следующим образом: нижняя граница $-\sigma_{\overline{X}}$ или $\overline{X}-\sigma_{\overline{X}}$, верхняя граница $+\sigma_{\overline{X}}$ или $\overline{X}+\sigma_{\overline{X}}$ (сокращено $\pm\sigma_{\overline{X}}$; $\overline{X}\pm\sigma_{\overline{X}}$), за пределы которых с вероятностью 0,683 не выйдут погрешности результата измерения или среднее арифметическое значение $\overline{X}$. Доверительный интервал результата измерения выражается в виде:

$$I_p = (\overline{X}-\sigma_{\overline{X}};\ \overline{X}+\sigma_{\overline{X}}) \quad \text{или} \quad I_p = (\overline{X}-t_p\cdot\sigma_{\overline{X}};\overline{X}+t_p\cdot\sigma_{\overline{X}}).$$

Оценка точности результата измерения при малом числе наблюдения

На практике в большинстве случаев число измерений не превышает 15 – 20 отдельных наблюдений. Для оценки точности результата измерения при малом числе наблюдений ($\boldsymbol{n} \leq 20$) и условии, что распределение погрешностей отдельных измерений следуют, нормальному закону пользуются $\boldsymbol{t_p}$-таблицей основанной на распределении Стьюдента.

Распределение Стьюдента учитывает то, что при малом числе наблюдений и при одинаковой доверительной вероятности получается уменьшенное значение средней квадратической погрешности по сравнению с погрешностью при $\boldsymbol{n}$ наблюдениях.

При практическом применении распределения Стьюдента погрешность Δ_p среднего арифметического значения (результаты измерения) при $\boldsymbol{n} \leq 20$ и заданной доверительной вероятности $\boldsymbol{P_\partial}$ определяется из значений $\boldsymbol{\sigma_{x_i}}$ или $\boldsymbol{\sigma_{\overline{X}}}$ по выражению:

$$\Delta_p = \sigma_{x_i} \cdot \frac{t_p}{\sqrt{n}} = t_p \cdot \sigma_{\overline{X}}.$$

Оценка точности результата измерения при малом числе наблюдения

Значения t_p и $t_p/\sqrt{n}$

в зависимости от доверительной вероятности $P_д$ и $k = n-1$

$P_д$	0,683		0,9		0.95		0,997	
$к$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{n}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{n}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{n}}$	t_p	$\frac{t_p}{\sqrt{n}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
10	1,05	0,32	1,81	0,55	2,23	0,67	3,90	1,18
11	1,05	0,30	1,80	0,52	2,20	0,65	3,80	1,10
12	1,05	0,29	1,78	0,49	2,18	0,60	3,80	1,05
…	…	…	…	…	…	…	…	…
20	1,03	0.23	1,72	0,38	2,09	0,47	3,40	0,76
…	…	…	…	…	…	…	…	…
200	1,00	0,07	1,65	0,12	1,97	0,14	3,04	0,22
∞	1	0,00	1,64	0,00	1,96	0,00	3,00	0,00

Оценка точности результата измерения при малом числе наблюдения

Значения квантиля распределения Стьюдента $t_{n,P}$

$n-1$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}99$	$n-1$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}99$
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
10	2,228	3,165	28	2,048	2,763
12	2,179	3,055	30	2,043	2,750
14	2,145	2,977	∞	1,960	2,576

Оценка точности результата измерения при малом числе наблюдения

Для оценки среднеарифметического значения $\bar{X}$, принимаемого как окончательный результат измерения, указываются доверительные границы и доверительный интервал при выбранной доверительной вероятности.

Доверительные границы $\bar{X} \pm \Delta_p$, нижняя $\bar{X} - \Delta_p$, верхняя $\bar{X} + \Delta_p$.

Доверительный интервал $I_p = (\bar{X} - \Delta_p, \bar{X} + \Delta_p)$,

где $$\Delta_p = \sigma_{x_i} \cdot \frac{t_p}{\sqrt{n}} = t_p \cdot \sigma_{\overline{X}}$$

и выражается в единицах определяемой величины.

Обнаружение грубых погрешностей измерений

Грубой погрешностью (промахом) называется погрешность, существенно превышающая значение ожидаемой погрешности при данных условиях проведения измерительного эксперимента. Обычно грубая погрешность является следствием значительного внезапного изменения условий эксперимента: скачка тока источника электропитания; не учтённое экспериментатором изменение температуры окружающей среды (при длительном эксперименте); неправильный отсчёт показаний из-за отвлечения внимания экспериментатора и др. Наличие грубых погрешностей в выборке результатов измерений могут сильно исказить среднее значение выборки и как следствие доверительный интервал. Поэтому выявление и исключение результатов, содержащих промах, обязательно.

Обычно результат измерения, содержащий грубую погрешность, сразу виден в ряду измеренных значений, но в каждом конкретном случае это необходимо доказать. Одним из критериев для оценки промаха является критерий Романовского.

Обнаружение грубых погрешностей измерений

В этом случае используют *уровень значимости* β, который определяется равенством

$$\beta = \frac{\left| M_x - x_{\min/\max} \right|}{S_x},$$

где M_x – среднее арифметическое $M_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$,

где x_i – результат измерения в ряду измеренных значений; $x_{\min/\max}$ – результат измерения, подозрительный на содержание грубой погрешности ($x_{\min}$ – наименьший результат измерения в ряду измеренных значений, $x_{\max}$ – наибольший результат измерения в ряду измеренных значений); S_x – статистическое среднее квадратическое отклонение (СКО)

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^2}{(n-1)}},$$ где n – количество измерений.

В зависимости от выбранной доверительной вероятности P, т.е. от желания экспериментатора получить уверенный результат проверки гипотезы, и числа измерений n из табл. находят теоретический уровень значимости $\beta_т$ и сравнивают с ним рассчитанное значение β. Если $\beta > \beta_т$, то результат $x_{min/max}$ следует отбросить как содержащий грубую погрешность. Если $\beta < \beta_т$, то выборку следует сохранить в полном объёме.

Как правило, критерий Романовского применяют при объёме выборки $n < 20$.

Значения теоретического уровня значимости $\beta_т$

n	P		
	0,90	0,95	0,99
3	1,412	1,414	1,414
5	1,869	1,917	1,972
7	2,093	2,182	2,310
9	2,238	2,349	2,532
11	2,343	2,470	2,689
13	2,426	2,563	2,809
15	2,523	2,670	2,946
17	2,551	2,701	2,983
19	2,601	2,754	3,049

Оценка точности результата косвенных измерений

Косвенное измерение — это определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

Для вычисления погрешностей косвенных измерений по известным погрешностям прямых измерений существуют следующие методики.

Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида $Y = a + b - c$ **(сумма, разность).**

Исходные данные: a, b, c, Δa, Δb, Δc.

Вывод формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в рассматриваемом случае можно выполнить следующим образом.

1. Найдём дифференциал правой и левой частей:

$$dY = d(a + b - c) = da + db - dc.$$

2. Произведём широко используемую в теории погрешностей замену дифференциалов абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы): $dY \approx \Delta Y$, $da \approx \Delta a$, $db \approx \Delta b$, $dc \approx \Delta c$. Тогда $\Delta Y = \Delta a + \Delta b - \Delta c$.

Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида $Y = a + b - c$ (сумма, разность).

3. Учитывая, что знаки погрешностей $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ обычно бывают заранее неизвестны, для получения гарантированной (*предельной*) оценки абсолютной погрешности косвенного измерения в последней формуле все знаки «–» заменим на знаки «+»:

$$\Delta Y_{\text{пр}} = \Delta a + \Delta b + \Delta c.$$

4. Найдём предельную оценку относительной погрешности косвенного измерения, учитывая, что относительная погрешность есть отношение абсолютной погрешности к результату измерений:

$$\delta Y_{\text{пр}} = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{a + b - c}.$$

Величина предельной погрешности во многих случаях бывает завышенной, поэтому часто применяют ***среднеквадратические*** оценки погрешности. Для получения среднеквадратической оценки погрешности в формуле для предельной оценки погрешности сумму заменяют корнем квадратным из суммы квадратов.

Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида $Y = a + b - c$ (сумма, разность).

Исходные данные: $a, b, c, \Delta a, \Delta b, \Delta c$.

1. $dY = d(a + b - c) = da + db - dc$.

2. $\Delta Y = \Delta a + \Delta b - \Delta c$.

3. $\Delta Y_{\text{пр}} = \Delta a + \Delta b + \Delta c$.

4. $\delta Y_{\text{пр}} = \dfrac{\Delta Y}{Y} = \dfrac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{a + b - c}$.

5. Найдём среднеквадратические оценки абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения:

$$\Delta Y_{\text{ск}} = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2}\ ;$$

$$\delta Y_{\text{ск}} = \frac{\Delta Y_{\text{ск}}}{Y} = \frac{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2}}{a + b - c}\ .$$

Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида $Y=\dfrac{ab}{c}$ (произведение, деление).

Исходные данные: $a, b, c, \Delta a, \Delta b, \Delta c$.

Вывод формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в рассматриваемом случае можно выполнить следующим образом.

1. Прологарифмируем левую и правую части заданной зависимости:

$$\ln Y=\ln\left(\frac{ab}{c}\right)=\ln a+\ln b-\ln c.$$

2. Найдём дифференциал правой и левой частей:

$$d\ln Y=d\ln\left(\frac{ab}{c}\right)=d\ln a+d\ln b-d\ln c.$$

3. Учитывая, что дифференциал от логарифма переменной величины находится по формуле $d(\ln x)=\dfrac{d\ln x}{dx}dx=\dfrac{dx}{x}$, получаем: $\dfrac{dY}{Y}=\dfrac{da}{a}+\dfrac{db}{b}-\dfrac{dc}{c}$.

Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида $Y = \dfrac{ab}{c}$ (произведение, деление).

4. Произведём широко используемую в теории погрешностей замену дифференциалов малыми абсолютными погрешностями (при условии, что абсолютные погрешности достаточно малы):

$dY \approx \Delta Y$, $da \approx \Delta a$, $db \approx \Delta b$, $dc \approx \Delta c$, тогда $\dfrac{\Delta Y}{Y} = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b} - \dfrac{\Delta c}{c}$.

5. Учитывая, что знаки погрешностей $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ заранее неизвестны, для получения гарантированной (*предельной*) оценки относительной погрешности косвенного измерения в последней формуле все знаки «–» заменяем на знаки «+»:

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)_{\text{пр}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}, \qquad \delta Y_{\text{пр}} = \delta a + \delta b + \delta c\ .$$

6. Предельную оценку абсолютной погрешности косвенного измерения находим по формуле

$$\Delta Y_{\text{пр}} = \delta Y_{\text{пр}} Y.$$

Получение формул для вычисления погрешностей косвенных измерений в случае зависимости вида $Y=\dfrac{ab}{c}$ (произведение, деление).

6. Предельную оценку абсолютной погрешности косвенного измерения находим по формуле $\Delta Y_{\text{пр}}=\delta Y_{\text{пр}}Y.$

Величина предельной погрешности во многих случаях бывает завышенной, поэтому часто применяют ***среднеквадратические*** оценки погрешности. Для получения среднеквадратической оценки погрешности в формуле для предельной оценки погрешности сумму заменяют корнем квадратным из суммы квадратов.

7. Найдём среднеквадратические оценки относительной и абсолютной погрешностей косвенного измерения:

$$\delta Y_{\text{ск}}=\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2}=\sqrt{(\delta a)^2+(\delta b)^2+(\delta c)^2}.$$

$$\Delta Y_{\text{ск}}=\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2}\,Y=\sqrt{(\delta a)^2+(\delta b)^2+(\delta c)^2}\,Y.$$

Оценка точности результата косвенных измерений

Если физическая величина $f = f(x, y, z)$ является функцией нескольких независимых друг от друга прямо измеряемых величин x, y, z, то расчет ее численного значения и погрешности измерения производится следующим образом.

Непосредственно определяют средние значения каждой измеряемой величины

$$\bar{x} = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N_2}\sum_{j=1}^{N_2} y_j, \quad \bar{z} = \frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3} z_k$$

и их полные погрешности

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сист}^2 + \Delta x_{случ}^2}, \quad \Delta y = \sqrt{\Delta y_{сист}^2 + \Delta y_{случ}^2}, \quad \Delta z = \sqrt{\Delta z_{сист}^2 + \Delta z_{случ}^2}.$$

Для вычисления погрешности косвенного измерения следует пользоваться формулой

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2}, \qquad (*)$$

где $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ – частные производные от функции $f(x, y, z)$ по независимым переменным, рассчитанные для средних значений.

Пример расчета погрешности косвенного измерения

Вычисляемая величина f является комбинацией физических величин x, y, z

$$f(x,y,z) = k\frac{x-y}{z^n},$$

где k и n – известные числа.

Сначала находят средние значения и их погрешности, а также среднее значение величины f, т.е. $\bar{f} = f(\bar{x},\bar{y},\bar{y}) = k\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{y}^n}$.

Затем вычисляют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x} = k\dfrac{1}{\bar{z}^n}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = k\dfrac{-1}{\bar{z}^n}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -kn\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{z}^{n+1}}$.

Это выражение можно упростить, умножив его на $1/f$ и преобразовав правую часть. Пользуясь формулой

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2}, \qquad (*)$$

записывают погрешность косвенного измерения

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2} = \sqrt{\left(k\frac{1}{\bar{z}^n}\Delta x\right)^2 + \left(k\frac{-1}{\bar{z}^n}\Delta y\right)^2 + \left(-kn\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{z}^{n+1}}\Delta z\right)^2}.$$

Умножив это выражение на $1/f$ и преобразовав правую часть, получаем относительную погрешность

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{x}-\bar{y}}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{-1}{\bar{x}-\bar{y}}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{-n}{\bar{z}}\Delta z\right)^2}. \qquad (**)$$

Выражение (**) можно получить, логарифмируя величину f

$$\ln f = \ln k + \ln(x-y) - n\ln z.$$

Погрешность измерения логарифма $\Delta \ln f = \frac{\partial \ln f}{\partial f}\Delta f = \frac{\Delta f}{f}$

равна относительной погрешности измеряемой величины.

Погрешность измерения логарифма по формуле (*)

$$\Delta \ln f = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\Delta z\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{x}-\bar{y}}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{-1}{\bar{x}-\bar{y}}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{-n}{\bar{z}}\Delta z\right)^2}.$$

Откуда получаем относительную погрешность (**)

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} = \Delta \ln f = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\Delta z\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{x}-\bar{y}}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{-1}{\bar{x}-\bar{y}}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{-n}{\bar{z}}\Delta z\right)^2}.$$

Примеры относительных погрешностей некоторых функций

$$1)\ f = ax^m + by^n + cz^k;\ \ \ln f = \ln\left(ax^m + by^n + cz^k\right);$$

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} = \Delta \ln f = \sqrt{\left(a\frac{m\bar{x}^{m-1}}{\bar{f}}\Delta x\right)^2 + \left(b\frac{n\bar{y}^{n-1}}{\bar{f}}\Delta y\right)^2 + \left(c\frac{k\bar{z}^{k-1}}{\bar{f}}\Delta z\right)^2}.$$

$$2)\ f = a\frac{x^m \cdot y^n}{z^k};\ \ \ln f = \ln a + m\ln x + n\ln y - k\ln z;$$

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} = \Delta \ln f = \sqrt{\left(\frac{m}{\bar{x}}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{n}{\bar{y}}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{-k}{\bar{z}}\Delta z\right)^2}.$$

Из приведенного примера 2 следует, что относительную погрешность для функции произведения степеней физических величин x, y, z можно записать, не прибегая к вычислению частных производных. В конечном выражении, как легко видеть, исчезает постоянный коэффициент. Показатель степени умножается на относительную погрешность той величины, показателем которой он является. Погрешности величин, с какими бы знаками они не входили в исходное выражение, складываются.

Правила представления результатов измерений

Всякое число состоит из цифр, определяющих количество единиц в различных разрядах числа. Например, в числе 1726,34 имеется шесть цифр. Число содержит 1 тысячу, 7 сотен, 2 десятка, 6 единиц, 3 десятых, 4 сотых. Старший разряд в числе – тысячи (1 тысяча), младший – сотые (4 сотых).

Цифры в числе могут быть значащими и незначащими. *Значащими цифрами числа являются все цифры данного числа, кроме нулей, стоящих слева.* Нули, стоящие в середине или в конце числа (справа) являются значащими цифрами, так как обозначают отсутствие единиц в соответствующем разряде. При этом цифры множителя 10^n не учитываются.

Примеры определения количества значащих цифр

Число	Количество значащих цифр
12	2
12,0	3
12,4	3
120	3
124	3
1,24$\cdot 10^{-3}$	3
0,**1240**	4
0,**1046**	4
0,**526**$\cdot 10^{6}$	3
0,**206**$\cdot 10^{-3}$	3
0,**200**$\cdot 10^{-3}$	3
0,0**20**$\cdot 10^{-3}$	2

Правила представления результатов измерений

Погрешности измерения должны содержать не более двух (т. е. одну или две) значащих цифры. Для этого следует использовать следующие правила и порядок ограничения числа значащих цифр.

1. Если первая значащая цифра в абсолютной погрешности Δ_x "1", "2", "3", то в погрешности оставляем две значащие цифры. Если первая значащая цифра в погрешности "4", "5", "6", "7", "8", "9", то в погрешности оставляем одну значащую цифру.

Примеры ограничения числа значащих цифр и округления погрешности

Пример	Пояснения
$0{,}154 \approx 0{,}15$ $1{,}967 \approx 2{,}0$ $19{,}37 \approx 19$ $144{,}1 \approx 0{,}14 \cdot 10^3$	Первая значащая цифра погрешности "1", поэтому оставляем две значащие цифры. Замечание. При необходимости число записывают с множителем 10^n, где n – показатель степени.
$0{,}394 \approx 0{,}39$ $3{,}94 \approx 3{,}9$	Первая значащая цифра погрешности "3", поэтому оставляем две значащие цифры.
$0{,}397 \approx 0{,}4$ $3{,}97 \approx 4$	Первая значащая цифра погрешности "3", поэтому оставляем две значащие цифры, но так как при округлении цифра "3" превращается в цифру "4", то оставляем только одну значащую цифру.

Правила представления результатов измерений

Примеры ограничения числа значащих цифр и округления погрешности

Пример	Пояснения
$0{,}461 \approx 0{,}5$ $4{,}78 \approx 5$ $41{,}1 \approx 4 \cdot 10$ $4123 \approx 4 \cdot 10^3$	Первая значащая цифра погрешности “4”, поэтому оставляем одну значащую цифру.
$0{,}917 \approx 0{,}9$ $9{,}17 \approx 9$ $91{,}7 \approx 9 \cdot 10$ $9123 \approx 9 \cdot 10^3$	Первая значащая цифра погрешности “9”, поэтому оставляем одну значащую цифру.
$0{,}0977 \approx 0{,}10$ $0{,}956 \approx 1{,}0$ $956 \approx 1{,}0 \cdot 10^3$	Первая значащая цифра погрешности “9”, поэтому оставляем одну значащую цифру, но так как при округлении цифра “9” превращается в число “10”, т.е. первая значащая цифра “1”, то оставляем две значащие цифры.
$2{,}45 \approx 2{,}4$ $2{,}35 \approx 2{,}4$	Первая значащая цифра погрешности “2”, поэтому оставляем две значащие цифры. Отбрасывается только одна цифра “5”, а за ней нет значащих цифр, поэтому округление производим до ближайшего четного числа.
$2{,}451 \approx 2{,}5$ $2{,}351 \approx 2{,}4$	Первая значащая цифра погрешности “2”, поэтому оставляем две значащие цифры. Первая из отбрасываемых цифр “5”, но отбрасываются две цифры, поэтому предыдущий разряд числа увеличиваем на единицу.

Правила представления результатов измерений

2. Измеренное значение $\bar{x}$ должно заканчиваться тем же младшим разрядом, что и абсолютная погрешность Δ_x. Например, если в абсолютной погрешности Δ_x оставлен младший разряд – единицы, то и в измеренном значении должен быть оставлен младший разряд – единицы.

Примеры ограничения количества значащих цифр в измеренном значении и его погрешности

Пример	Пояснения
$43{,}234 \pm 0{,}0417 \approx 43{,}23 \pm 0{,}04$ $32{,}3754 \pm 0{,}0917 \approx 32{,}38 \pm 0{,}09$	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – сотые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – сотые.
$4{,}3234 \pm 0{,}0397 \approx 4{,}32 \pm 0{,}04$ $43{,}2364 \pm 0{,}0522 \approx 43{,}24 \pm 0{,}05$ $432{,}37 \pm 0{,}0917 \approx 432{,}37 \pm 0{,}09$	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – сотые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – сотые.
$432{,}37 \pm 0{,}956 \approx 432{,}4 \pm 1{,}0$ $432{,}3477 \pm 2{,}45 \approx 432{,}3 \pm 2{,}4$ $432{,}134 \pm 2{,}86 \approx 432{,}1 \pm 2{,}9$ $43{,}234 \pm 3{,}94 \approx 43{,}2 \pm 3{,}9$	В погрешности оставляем две значащие цифры, последний разряд – десятые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – десятые.

Правила представления результатов измерений

Примеры ограничения количества значащих цифр в измеренном значении и его погрешности

Пример	Пояснения
$43{,}234 \pm 0{,}297 \approx 43{,}2 \pm 3{,}0$ $432{,}345 \pm 1{,}441 \approx 4323{,}4 \pm 1{,}4$	В погрешности оставляем две значащие цифры, младший разряд – десятые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – десятые.
$43{,}234 \pm 3{,}97 \approx 43 \pm 4$ $432{,}364 \pm 5{,}55 \approx 432 \pm 6$ $432{,}34 \pm 39{,}4 \approx 432 \pm 39$ $432{,}34 \pm 19{,}37 \approx 432 \pm 19$	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – единицы. В измеренном значении оставляем также младший разряд – единицы.
$432{,}34 \pm 49{,}1 \approx (43 \pm 5) \cdot 10$ $426{,}34 \pm 41{,}1 \approx (43 \pm 4) \cdot 10$	В погрешности оставляем одну значащую цифру. Так как за скобки выносим общий множитель “10”, то младший разряд – единицы. В измеренном значении оставляем также младший разряд – единицы.
$432{,}34 \pm 39{,}7 \approx (4{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^2$ $437{,}34 \pm 59{,}7 \approx (4{,}4 \pm 0{,}6) \cdot 10^2$	В погрешности оставляем одну значащую цифру. Так как за скобки выносим общий множитель “10^2”, то младший разряд – десятые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – десятые.

Правила представления результатов измерений

Примеры ограничения количества значащих цифр в измеренном значении и его погрешности

Пример	Пояснения
$4326{,}4 \pm 211 \approx (4{,}33 \pm 0{,}21) \cdot 10^3$ $4323{,}4 \pm 219 \approx (4{,}32 \pm 0{,}22) \cdot 10^3$	В погрешности оставляем две значащие цифры. Так как за скобки выносим общий множитель “10^3”, то младший разряд – сотые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – сотые.
$0{,}0004623 \pm 0{,}00017 \approx$ $\approx (4{,}6 \pm 1{,}7) \cdot 10^{-4}$	В погрешности оставляем две значащих цифры. Так как за скобки выносим общий множитель “10^{-4}”, то младший разряд – десятые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – десятые.

3. В относительной погрешности число значащих цифр ограничиваем по тем же правилам, что и в абсолютной погрешности.

Правила представления результатов измерений

При ограничении числа значащих цифр используем операцию округления. Округление числа представляет собой отбрасывание значащих цифр справа после определенного разряда с возможным изменением цифры этого разряда.

Существуют следующие правила округления.

1. Если первая из отбрасываемых цифр меньше чем “5”, то цифра предыдущего разряда не изменяется.
2. Если первая из отбрасываемых цифр больше чем “5”, то цифра предыдущего разряда увеличивается на единицу.
3. Если отбрасываются несколько цифр и первая из отбрасываемых цифр “5”, то цифра предыдущего разряда увеличивается на единицу.
4. Если отбрасывается только одна цифра “5”, а за ней нет цифр, то округление производится до ближайшего четного числа, т. е. цифра предыдущего разряда остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.
5. Округление следует выполнять сразу до желаемого числа значащих цифр, а не по этапам, что может привести к ошибкам.

Если табличные или экспериментальные данные приводятся без указания погрешности, то обычно считается, что эта погрешность составляет $\pm 0{,}5$ последней значащей цифры.

Примеры обработки результатов измерений

1. Обработка прямых однократных измерений

Рассмотрим следующий пример. С помощью штангенциркуля измеряем диаметр цилиндра. Инструментальная погрешность штангенциркуля равна $\Delta_и = 0{,}1$ мм.

В результате однократного измерения получено значение диаметра цилиндра $\overline{D} = 15{,}6$ мм. За абсолютную погрешность измерения принимаем инструментальную погрешность штангенциркуля $\Delta_D = \Delta_и = 0{,}1$ мм.

Вычисляем относительную погрешность измерения диаметра

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta_D}{\overline{D}} 100\% = \frac{0{,}1}{15{,}6} 100\% = 0{,}641\,\%.$$

С учетом правил представления результатов измерений в относительной погрешности оставляем одну значащую цифру, так как первая значащая цифра “6” больше “3”

$$\varepsilon_D = 0{,}641\,\% \approx 0{,}6\,\%.$$

Конечный результат однократного измерения диаметра цилиндра для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{D = (15{,}6 \pm 0{,}1)\ \text{мм}; \qquad \varepsilon_D = 0{,}6\,\%; \qquad \alpha = 1.}$$

Примеры обработки результатов измерений

2. Обработка прямых многократных измерений

Рассмотрим пример расчета погрешностей прямых многократных измерений.

1. С помощью секундомера проведено $n = 5$ измерений 10 колебаний маятника. В результате получены экспериментальные данные:

$$t_1 = 15{,}3\ \text{с};\ t_2 = 15{,}7\ \text{с};\ t_3 = 15{,}4\ \text{с};\ t_4 = 15{,}5\ \text{с};\ t_5 = 15{,}4\ \text{с}.$$

2. Рассчитываем среднее арифметическое значение

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n=5} t_i = \frac{1}{5}\left(15{,}3 + 15{,}7 + 15{,}4 + 15{,}5 + 15{,}5\right) = 15{,}48\ \text{с}.$$

Согласно правилам приближенных вычислений среднее арифметическое значение должно иметь на один разряд больше, чем исходные данные. Поэтому оставляем в $\bar{t}$ сотые доли.

3. Находим оценку СКО результата измерения

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n=5}\left(t_i - \bar{t}\right)^2}{n(n-1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(15{,}3 - 15{,}46)^2 + (15{,}7 - 15{,}46)^2 + (15{,}3 - 15{,}46)^2 + (15{,}5 - 15{,}46)^2 + (15{,}4 - 15{,}46)^2}{5(5-1)}} = 0{,}0663\ \text{с}.$$

Примеры обработки результатов измерений

2. Обработка прямых многократных измерений

4. Из табл. для $n = 5$ выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n} = 2{,}78$ и рассчитываем доверительный интервал случайной погрешности (случайную погрешность)

$$\Delta_{\bar{t}} = t_{\alpha,n}\, S_{\bar{x}} = 2{,}78 \cdot 0{,}0663 = 0{,}184 \text{ с.}$$

В промежуточном расчете оставляем три значащие цифры.

5. Определяем абсолютную погрешность измерения с учетом случайной и инструментальной погрешностей

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta_{\bar{t}}^2 + \left(\frac{2}{3}\Delta_{иt}\right)^2} = \sqrt{0{,}184^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}2\right)^2} = 0{,}228 \text{ с.}$$

В промежуточном расчете оставляем три значащие цифры.

6. Вычисляем относительную погрешность

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta_t}{\bar{t}} 100\ \% = \frac{0{,}228}{15{,}48} 100\ \% = 1{,}47\ \%.$$

В промежуточном расчете также оставляем три значащие цифры.

Правила представления результатов измерений

3. Обработка косвенных измерений

Погрешность функции одной переменной. Рассмотрим случай, когда измеряемая величина является функцией одной переменной $z = 10\cos\varphi$,

где φ – величина, полученная в результате прямых измерений

$$\varphi = (11{,}0 \pm 0{,}5)^\circ; \quad \varepsilon_\varphi = 5\ \%; \quad \alpha = 0{,}95.$$

При расчете погрешностей тригонометрических функций необходимо абсолютную погрешность угловых величин выражать в радианах

$$1^\circ = 0{,}0175\ \text{рад},$$

тогда $\Delta_\varphi = 0{,}5^\circ = 0{,}5 \cdot 0{,}0175 = 8{,}75 \cdot 10^{-3}$.

Косвенно измеряемая величина z равна

$$\bar{z} = 10\cos\bar{\varphi} = 10\cos(11{,}0^\circ) = 9{,}816.$$

Рассчитаем абсолютную погрешность функции z

$$\Delta_z = \left|\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\varphi}\Delta_\varphi\right| = 10\sin\varphi \cdot \Delta_\varphi = 10\sin(11{,}0^\circ) \cdot 8{,}75 \cdot 10^{-3} = 0{,}0167.$$

Правила представления результатов измерений

3. Обработка косвенных измерений

Погрешность функции одной переменной. Рассмотрим случай, когда измеряемая величина является функцией одной переменной $z = 10\cos\varphi$,

где φ – величина, полученная в результате прямых измерений

$$\varphi = (11{,}0 \pm 0{,}5)^\circ; \quad \varepsilon_\varphi = 5\ \%; \quad \alpha = 0{,}95.$$

Косвенно измеряемая величина z равна

$$\bar{z} = 10\cos\bar{\varphi} = 10\cos(11{,}0^\circ) = 9{,}816.$$

Рассчитаем абсолютную погрешность функции z

$$\Delta_z = \left|\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\varphi}\Delta_\varphi\right| = 10\sin\varphi\cdot\Delta_\varphi = 10\sin(11{,}0^\circ)\cdot 8{,}75\cdot 10^{-3} = 0{,}0167.$$

Относительную погрешность ε_z определяем по формуле

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta_z}{\bar{z}}100\ \% = \frac{0{,}0167}{9{,}816}100\ \% = 0{,}170\ \%.$$

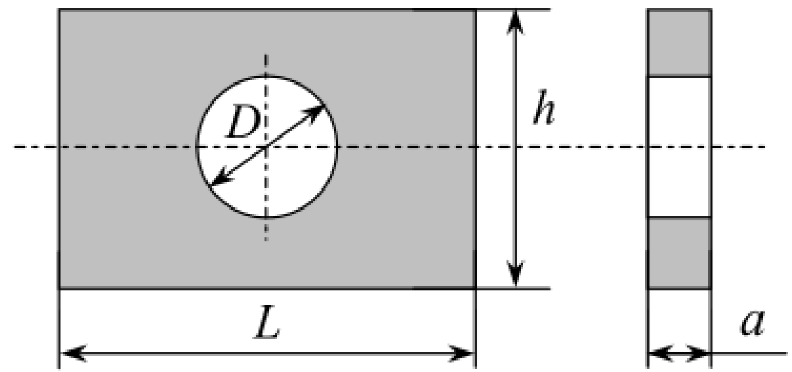
Результат измерения записываем в виде

$$\boxed{z = (9{,}816 \pm 0{,}017); \qquad \varepsilon_z = 0{,}17\ \%; \qquad \alpha = 0{,}95.}$$

Правила представления результатов измерений

3. Обработка косвенных измерений

Рассмотрим пример косвенного измерения плотности материала детали, изображенной на рис. Длинная сторона детали имеет неровные края.



Расчет плотности материала проводим по формуле

$$\rho = \frac{m}{a\left(Lh - \frac{\pi D^2}{4}\right)}, \qquad (*)$$

где m – масса, a – толщина, L – длина, h – ширина, D – диаметр отверстия.

Проведем измерения всех величин m, a, L, h, D, входящих в расчетную формулу (*), и определим их абсолютные и относительные погрешности.

3. Обработка косвенных измерений

Линейные размеры L, h детали и диаметр отверстия D измеряем с помощью штангенциркуля с инструментальной погрешностью $\Delta_{и} = 0{,}1$ мм; толщину a детали – микрометром с инструментальной погрешностью $\Delta_{и} = 0{,}01$ мм; массу m детали определяем взвешиванием на технических весах с инструментальной погрешностью $\Delta_{и} = 50$ мг.

Ввиду того, что длинная сторона детали имеет неровные края, ширину h с целью уменьшения случайной погрешности измеряем пять раз. В результате получаем экспериментальные данные:

$$h_1 = 59{,}5 \text{ мм}; \; h_2 = 60{,}1 \text{ мм}; \; h_3 = 58{,}9 \text{ мм}; \; h_4 = 60{,}5 \text{ мм}; \; h_5 = 60{,}0 \text{ мм}.$$

Рассчитаем среднее арифметическое значение

$$\overline{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n=5} h_i = \frac{1}{5}\left(59{,}3 + 60{,}1 + 58{,}9 + 60{,}5 + 60{,}0\right) = 59{,}76 \text{ мм}.$$

В среднем арифметическом значении оставляем младший разряд – сотые.

Правила представления результатов измерений

3. Обработка косвенных измерений

Найдем оценку СКО результата измерения

$$S_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n=5}\left(h_i - \bar{h}\right)^2}{n(n-1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(59{,}3-59{,}76)^2 + (60{,}1-59{,}76)^2 + (58{,}9-59{,}76)^2 + (60{,}5-59{,}76)^2 + (60{,}0-59{,}76)^2}{5(5-1)}} = 0{,}289 \text{ мм.}$$

В оценке СКО результата измерения оставляем три значащие цифры, т. е. на одну больше, чем может содержать абсолютная погрешность.

Из табл. для $n = 5$ выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n} = 2{,}78$ и рассчитаем доверительный интервал случайной погрешности (случайную погрешность)

$$\Delta_{\bar{h}} = t_{\alpha,n}\, S_{\bar{h}} = 2{,}78 \cdot 0{,}289 = 0{,}8038 \approx 0{,}804 \text{ мм.}$$

3. Обработка косвенных измерений

Определяем абсолютную погрешность результата измерения с учетом случайной и инструментальной погрешностей

$$\Delta_h = \sqrt{\Delta_{\bar{h}}^2 + \left(\frac{2}{3}\Delta_{иh}\right)^2} = \sqrt{0{,}804^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}1\right)^2} = 0{,}8067 \approx 0{,}807 \text{ мм.}$$

В промежуточном расчете оставляем три значащие цифры.

Найдем относительную погрешность

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta_h}{\bar{h}} 100\,\% = \frac{0{,}807}{59{,}76}\cdot 100\,\% = 1{,}35\,\%.$$

В промежуточном расчете также оставляем три значащие цифры.

Ограничиваем количества значащих цифр в погрешностях Δ_h и ε_h, и измеренном значении $\bar{h}$.

В абсолютной погрешности $\Delta_h = 0{,}807$ мм первая значащая цифра “8” больше “3”, следовательно, оставляем одну значащую цифру $\Delta_h = 0{,}8$ мм.

Так как младший разряд в абсолютной погрешности составляет десятые доли ($\Delta_h = 0{,}8$ мм), то в измеренном значении оставляем тоже десятые доли числа. Таким образом, получаем $\bar{h} = 59{,}8$ мм.

3. Обработка косвенных измерений

В относительной погрешности оставляем две значащих цифры, так как первая значащая цифра “1” меньше “3”. Но поскольку отбрасывается одна цифра “5”, то предыдущий разряд числа увеличиваем на единицу, чтобы цифра этого разряда была четной $\varepsilon_h = 1{,}35\,\% \approx 1{,}4\,\%$.

Окончательный результат измерения высоты записываем в виде

$$\boxed{h = (59{,}8 \pm 0{,}8)\ \text{мм}; \qquad \varepsilon_h = 1{,}4\,\%; \qquad \alpha = 0{,}95.}$$

В результате однократного измерения длины L детали штангенциркулем получено значение $\overline{L} = 81{,}6$ мм с абсолютной погрешностью $\Delta_L = \Delta_{иL} = 0{,}1$ мм. Относительную погрешность определяем по формуле

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta_L}{\overline{L}} 100\,\% = \frac{0{,}1}{81{,}6} 100\,\% = 0{,}123\,\%.$$

Окончательный результат измерения длины для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{L = (81{,}6 \pm 0{,}1)\ \text{мм}; \qquad \varepsilon_L = 0{,}12\,\%; \qquad \alpha = 1.}$$

3. Обработка косвенных измерений

При однократном измерении диаметра отверстия D штангенциркулем получено значение $\overline{D} = 50{,}2$ мм, с абсолютной погрешностью $\Delta_D = \Delta_{иD} = 0{,}1$ мм. Относительную погрешность определяем по формуле

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta_D}{\overline{D}} 100\ \% = \frac{0{,}1}{50{,}2} 100\ \% = 0{,}199\ \%.$$

Окончательный результат измерения диаметра для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{D = (50{,}2 \pm 0{,}1)\ \text{мм}; \qquad \varepsilon_D = 0{,}20\ \%; \qquad \alpha = 1.}$$

Для измерения толщины a детали с целью уменьшения относительной погрешности использовался микрометр. В результате однократного измерения толщины a штангенциркулем получено значение $\overline{a} = 0{,}50$ мм с абсолютной погрешностью $\Delta_a = \Delta_{иa} = 0{,}01$ мм.

Относительную погрешность определяем по формуле

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{\overline{a}} 100\ \% = \frac{0{,}01}{0{,}50} 100\ \% = 2{,}0\ \%.$$

Окончательный результат измерения толщины для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{a = (0{,}50 \pm 0{,}01)\ \text{мм}; \qquad \varepsilon_a = 2{,}0\ \%; \qquad \alpha = 1.}$$

3. Обработка косвенных измерений

Масса образца $\overline{m} = 3{,}84$ г получена взвешиванием на технических весах с инструментальной погрешностью $\Delta_m = \Delta_{им} = 50$ мг. Рассчитываем относительную погрешность измерения массы

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta_m}{\overline{m}} 100\ \% = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{3{,}84} 100\% = 1{,}30\ \%.$$

Окончательный результат измерения массы образца для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{m = (3{,}84 \pm 0{,}05)\ \text{г}; \quad \varepsilon_m = 1{,}3\ \%; \quad \alpha = 1.}$$

Для удобства проведения дальнейших расчетов представим полученные результаты прямых измерений в табл.

Измеряемая величина	Значение измеряемой величины	Абсолютная погрешность, Δ_x		Относительная погрешность, ε_x, %	
		$\alpha = 1$	$\alpha = 0{,}95$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0{,}95$
h	59,7 мм	–	0,8 мм	–	1,3
L	81,6 мм	0,1 мм	0,07 мм	0,12	0,08
D	50,2 мм	0,1 мм	0,07 мм	0,20	0,13
a	0,50 мм	0,01 мм	0,007 мм	2,0	1,34
m	3,84 г	50 мг	33 мг	1,3	0,9

3. Обработка косвенных измерений

Плотность материала образца равна

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{a}\left(\bar{L}\,\bar{h} - \dfrac{\pi \bar{D}^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{3{,}84 \cdot 10^{-3}}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\left[81{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 59{,}7 \cdot 10^{-3} - \dfrac{3{,}14\left(50{,}2 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4}\right]} = 2655 \text{ кг/м}^3 .$$

Для получения расчетного соотношения относительной погрешности измерения плотности предварительно представим формулу в виде одночлена $\rho = \dfrac{m}{a\,S} = m^{+1} a^{-1} S^{-1}$, где $S = L\,h - \dfrac{\pi D^2}{4}$.

Тогда получаем относительную погрешность

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{\left(+1 \cdot \varepsilon_m\right)^2 + \left(-1 \cdot \varepsilon_a\right)^2 + \left(-1 \cdot \varepsilon_S\right)^2} = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_a^2 + \varepsilon_S^2} .$$

3. Обработка косвенных измерений

Погрешности величины S определим, пренебрегая погрешностью числа π. В соответствии с формулой абсолютная погрешность величины S равна

$$\Delta_S = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial L}\Delta_L\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial h}\Delta_h\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial D}\Delta_D\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\overline{h}\Delta_L\right)^2 + \left(\overline{L}\Delta_h\right)^2 + \left(-\frac{2\pi\overline{D}}{4}\Delta_D\right)^2}.$$

В формулу из табл. подставляем погрешности прямых измерений, пересчитанные для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ и определяем

$$\Delta_S = \sqrt{(59{,}7\cdot 0{,}07)^2 + (81{,}6\cdot 0{,}8)^2 + \left(-\frac{2\pi\cdot 50{,}2}{4}\cdot 0{,}07\right)^2} = 65{,}6 \text{ мм}^2.$$

3. Обработка косвенных измерений

Определяем относительную погрешность величины S

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta_S}{\overline{L}\,\overline{h} - \frac{\pi \overline{D}^2}{4}} 100\,\% = \frac{65{,}6 \cdot 10^{-3}}{81{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 59{,}7 \cdot 10^{-3} - \frac{\pi \cdot \left(50{,}2 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4}} 100\,\% = 2{,}27\,\%.$$

Относительную погрешность измерения плотности ρ определяем по формуле

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_a^2 + \varepsilon_S^2} = \sqrt{0{,}9^2 + 1{,}34^2 + 2{,}27^2} = 2{,}81\%.$$

Абсолютная погрешность измерения плотности равна

$$\Delta_\rho = \frac{\varepsilon_\rho \overline{\rho}}{100} = \frac{2{,}81}{100} \cdot 2655 = 74{,}6 \text{ кг/м}^3.$$

Окончательный результат измерения записываем в виде

$$\boxed{\rho = (2{,}66 \pm 0{,}07) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \varepsilon_\rho = 2{,}8\ \%; \quad \alpha = 0{,}95.}$$

4. Обработка косвенных измерений при невоспроизводимых условиях

Особым видом косвенных измерений являются косвенные *измерения в невоспроизводимых условиях*, т. е. при систематическом изменении одного или нескольких параметров. В этом случае значение косвенно измеряемой величины вычисляется для каждого отдельного измерения, а полученные результаты обрабатываются совместно, как прямые многократные измерения.
Такая обработка результатов позволяет учитывать лишь случайные погрешности измерений.

В качестве примера рассмотрим измерение скорости полета пули с помощью баллистического маятника.

В опыте проводим измерения высоты h подъема маятника после попадания в него пули.

Расчет величины скорости полета пули проводим по формуле

$$V = \frac{m_{\text{м}}}{m_{\text{п}}} \sqrt{2\,g\,h}\,,$$

4. Обработка косвенных измерений при невоспроизводимых условиях

Расчет величины скорости полета пули проводим по формуле

$$V = \frac{m_{\text{м}}}{m_{\text{п}}}\sqrt{2gh}, \quad (**)$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{п}}$ – массы маятника и пули, соответственно, $m_{\text{м}} = 10{,}0$ кг, $m_{\text{п}} = 10{,}0$ г; h – высота подъема маятника; g – ускорение свободного падения, $g = 9{,}81$ м/с^2.

При первом измерении высоты получено значение $h_1 = 29{,}8$ мм, по формуле (**) рассчитываем значение скорости пули

$$V_1 = \frac{10}{10 \cdot 10^{-3}}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 29{,}8 \cdot 10^{-3}} = 764 \text{ м/с}.$$

Результаты измерений высоты h и расчета скорости пули представлены в табл.

h, мм	29,8	28,7	28,5	29,1	30,2	29,7	29,6	29,3	29,1	29,5
V, м/с	764	750	747	755	769	763	762	759	755	760

Полученные результаты обрабатываем как прямые многократные измерения.

4. Обработка косвенных измерений при невоспроизводимых условиях

1. рассчитываем среднее арифметическое значение скорости пули $\overline{V} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n=10} V_i = 758{,}4$ м/с.

2. находим оценку СКО результата измерения $S_{\overline{V}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n=10}\left(V_i - \overline{V}\right)^2}{10(10-1)}} = 2{,}12$ м/с.

3. Из табл. для $n = 10$ выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n} = 2{,}26$ и рассчитываем доверительный интервал случайной погрешности $\Delta_{\overline{V}} = t_{\alpha,n} \cdot S_{\overline{V}} = 2{,}26 \cdot 2{,}12 = 4{,}79$ м/с.

4. вычисляем относительную погрешность $\varepsilon_V = \frac{\Delta_{\overline{V}}}{\overline{V}} = \frac{5 \cdot 100}{758{,}4} = 0{,}659$ %.

Результат измерения с учетом правил представления результатов измерений записываем в виде

$$\boxed{V = (758 \pm 5)\,\text{м/с}; \qquad \varepsilon_V = 0{,}7\,\%; \qquad \alpha = 0{,}95.}$$

В косвенных измерениях при невоспроизводимых условиях учитываются только случайные погрешности.

5. Обработка совместных измерений. Метод наименьших квадратов

Целью совместных измерений является нахождение зависимости между несколькими прямо или косвенно измеренными величинами.

Надежным и научно обоснованным способом определения коэффициентов экспериментальных зависимостей является *метод наименьших квадратов* (МНК). Суть его заключается в подборе таких значений коэффициентов, при которых сумма квадратов отклонений, измеренных в опытах значений $y_i(i=1,2,\ldots,n)$ от рассчитанных была бы минимальной. МНК позволяет не только найти коэффициенты функциональной зависимости, но и провести оценку погрешностей найденных коэффициентов.

МНК рассмотрим в варианте, когда приняты следующие допущения:

– между переменными существует зависимость вида $y = a + bx$;

– погрешности величины x малы.

5. Обработка совместных измерений. Метод наименьших квадратов

Расчет коэффициентов a и b следует проводить в такой последовательности:

1. Из опыта получить n пар значений аргумента и функции (x_i, y_i).

2. Найти средние значения всех экспериментальных точек:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i; \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i.$$

3. Найти коэффициенты прямой по следующим формулам:

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}; \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

4. Рассчитать параметры D, d_i

$$d_i = y_i - (a + bx_i); \qquad D = \sum (x_i - \bar{x})^2.$$

5. Определить СКО коэффициентов a и b

$$S_b^2 = \frac{1}{D}\frac{\sum d_i^2}{n-2}; \qquad S_a^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum d_i^2}{n-2}.$$

5. Обработка совместных измерений. Метод наименьших квадратов

Расчет коэффициента b и его СКО упрощается, если из теории известно, что прямая проходит через начало координат. Тогда параметр b и его СКО находят по следующим формулам:

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}; \qquad S_b^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} \frac{\sum d_i^2}{n-1}.$$

6. Погрешность рассчитанной величины y при произвольном значении аргумента x рассчитывают для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ как погрешность косвенных измерений

$$\Delta_y = \sqrt{(2S_a)^2 + (2S_b x)^2}\,.$$

5. Обработка совместных измерений. Метод наименьших квадратов

Пример. Исследуется зависимость скорости $V(t)$ при равноускоренном движении, которая удовлетворяет уравнению прямой

$$V = V_0 + gt\,.$$

Результаты измерений представлены в табл.

t, c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V, м/с	3,3	3,6	5,1	6,6	6,5	8,2	9,0	9,6	11,6	11,4	13,0

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n=11} t_i = \frac{1}{11}(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11) = 6{,}00 \text{ с};$$

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n=11} V_i =$$

$$= \frac{1}{11}(3{,}3+3{,}6+5{,}1+6{,}6+6{,}5+8{,}2+9{,}0+9{,}6+11{,}6+11{,}4+13{,}0) = 7{,}99 \text{ м/с}.$$

5. Обработка совместных измерений. Метод наименьших квадратов

Затем рассчитываем значения искомых параметров:

$$b = \frac{\sum(t_i - \bar{t})(V_i - \bar{V})}{\sum(t_i - \bar{t})^2} = \frac{107{,}69}{110} = 0{,}979 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \bar{V} - b\bar{t} = 7{,}99 - 0{,}979 \cdot 6{,}00 = 2{,}12 \text{ м/с}.$$

Далее находим вспомогательные параметры и СКО коэффициентов:

$$\sum d_i^2 = 1{,}69 \text{ м/с}; \; D = \sum(t_i - \bar{t})^2 = 110 \text{ с}^2;$$

$$S_b^2 = \frac{1}{D} \cdot \frac{\sum d_i^2}{n-2} = \frac{1}{110} \cdot \frac{1{,}69}{11-2} = 1{,}70 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}^4;$$

$$S_b = 41{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2;$$

$$S_a^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right) \cdot \frac{\sum d_i^2}{n-2} = \left(\frac{1}{11} + \frac{6^2}{110}\right) \cdot \frac{1{,}69}{9} = 78{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$S_a = 0{,}280 \text{ м/с}.$$

5. Обработка совместных измерений. Метод наименьших квадратов

Для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ находим границы доверительных интервалов коэффициентов

$$\Delta_a = 2S_a = 2 \cdot 0{,}280 = 0{,}560\ \text{м/с};$$

$$\Delta_b = 2S_b = 2 \cdot 4{,}12 \cdot 10^{-2} = 82{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2.$$

Результат измерения с учетом правил представления результатов измерения записываем в виде

$$V_0 = a = (2{,}1 \pm 0{,}6)\ \text{м/с}; \qquad g = b = (0{,}98 \pm 0{,}08)\,\text{м/с}^2.$$

А искомое уравнение выглядит следующим образом

$$V = 2{,}1 + 0{,}98t.$$

Следует отметить, что из-за сравнительно большого объема вычислений применение метода наименьших квадратов целесообразно проводить с помощью компьютера или калькулятора.

5. Обработка совместных измерений. Метод наименьших квадратов

Для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ находим границы доверительных интервалов коэффициентов

$$\Delta_a = 2S_a = 2 \cdot 0{,}280 = 0{,}560 \text{ м/с};$$

$$\Delta_b = 2S_b = 2 \cdot 4{,}12 \cdot 10^{-2} = 82{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

Результат измерения с учетом правил представления результатов измерения записываем в виде

$$V_0 = a = (2{,}1 \pm 0{,}6) \text{ м/с}; \qquad g = b = (0{,}98 \pm 0{,}08) \text{ м/с}^2.$$

А искомое уравнение выглядит следующим образом

$$V = 2{,}1 + 0{,}98t.$$

Следует отметить, что из-за сравнительно большого объема вычислений применение метода наименьших квадратов целесообразно проводить с помощью компьютера или калькулятора.