# 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## § 1. Производная функции. Правила дифференцирования. Таблица производных

Пусть $f(x)$ – функция, определённая в некоторой окрестности точки $x_0$. Введём обозначения: $x - x_0 = \Delta x$ (приращение аргумента $x$), $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ (приращение функции $y$).

*Определение.* Производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует и обозначается

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

*Основные правила дифференцирования*

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функции, дифференцируемые в точке $x$, тогда справедливы формулы:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

4) $(cu)' = cu'$.

5) Пусть определена сложная функция $y = f(g(x))$, тогда если функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u$, а функция $u = g(x)$ имеет производную в точке $x$, то сложная функция $y = f(g(x))$ имеет производную в точке $x$ и справедливо равенство $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $y'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$, равенство называется *правилом дифференцирования сложной функции*.

## *Таблица производных основных элементарных функций*

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c = \text{const}$ | $0$ |
| $x^{\alpha}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ , $\alpha \in R$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \cdot \ln a$, $a > 0, a \neq 1$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\text{tg} x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\text{ctg} x$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\text{arctg} x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $\text{arcctg} x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $\text{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ | $\text{ch} x$ |
| $\text{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ | $\text{sh} x$ |
| $\text{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | $\dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$ |
| $\text{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ | $\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$ |

## Образцы решения задач

*Пользуясь правилами дифференцирования, найти производные следующих функций.*

**1.** $y=\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+2x-10.$

**Решение.** Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$y=x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{3}}-x^{-2}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x-10.$$

Применяя правила и таблицу производных, получим

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+3\cdot(-\frac{1}{3})x^{-\frac{1}{3}-1}-(-2)x^{-2-1}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}+2x^{1-1}-0=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{2}{x^3}+\sqrt{x^3}+2.$$

**2.** $y=\dfrac{3x^2+1}{2x^3+5}.$

**Решение.** Пользуясь правилом дифференцирования дроби и таблицей производных, получим

$$y'=\frac{(3x^2+1)'\cdot(2x^3+5)-(2x^3+5)'\cdot(3x^2+1)}{(2x^3+5)^2}=\frac{6x(2x^3+5)-6x^2(3x^2+1)}{(2x^3+5)^2}=$$

$$=\frac{-6x^4-6x^2+30x}{(2x^3+5)^2}.$$

**3.** $y=(x^2+1)\cdot\mathrm{arctg}\,x$.

**Решение.** Применяя правило дифференцирования произведения, находим

$$y'=(1+x^2)'\cdot\mathrm{arctg}x+(\mathrm{arctg}x)'\cdot(1+x^2)=2x\cdot\mathrm{arctg}x+\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)=$$

$$=2x\cdot\mathrm{arctg}x+1.$$

**4.** $y=\sqrt[3]{2x-x^4}$ .

**Решение.** Данная функция является сложной функцией: $y=u^{\frac{1}{3}}$ , где $u=2x-x^4$. Следовательно,

$$y' = \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}-1} \cdot u' = \frac{1}{3}(2x - x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - x^4)' = \frac{1}{3}(2x - x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 - 4x^3).$$

*Замечание.* Обычно при вычислениях вспомогательные переменные не вводят.

**5.** $y = \arccos \dfrac{3}{x^2}$.

**Решение.** Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, получим

$$y' = (\arccos 3x^{-2})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(3x^{-2})^2}} \cdot (3x^{-2})' = -\frac{1}{\sqrt{1-9x^{-4}}} \cdot (-6x^{-3}) =$$

$$= \frac{6}{x^3 \cdot \sqrt{1-9x^{-4}}}.$$

**6.** $y = \ln \sin^3 x$.

**Решение.** Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, получим

$$y' = \frac{1}{\sin^3 x} \cdot (\sin^3 x)' = \frac{1}{\sin^3 x} \cdot 3(\sin x)^2 \cdot (\sin x)' = \frac{3\cos x}{\sin x} = 3\mathrm{ctg} x.$$

**7.** $y = \ln \sqrt{\dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}$; *вычислить* $y'(0)$.

**Решение.** Преобразуем данную функцию

$$y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} = \frac{1}{2}(\ln e^{3x} - \ln(1+e^{3x})) = \frac{1}{2}(3x - \ln(1+e^{3x})).$$

Затем дифференцируем функцию по формулам

$$y' = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{(1+e^{3x})'}{1+e^{3x}}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right) = \frac{3}{2(1+e^{3x})};\; y'(0) = \frac{3}{4}.$$

## § 2. Исследование функций с помощью производных

### Теоретический материал

### *Правило Лопиталя*

1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при условии, что предел в правой части существует.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при условии, что предел в правой части существует.

### *Возрастание и убывание функции*

Многие функции в одних интервалах изменения независимой переменной возрастают (если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции), а в других – убывают (если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции).

*Условие монотонности функции:* если в некотором интервале $y'>0$, то функция возрастает, а если $y'<0$, то функция убывает.

Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция. Производную от производной $f'(x)$ обозначают $f''(x)$ и называют второй производной функции $f(x)$.

### *Экстремум функции*

Точка $x=x_0$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если в $\delta-$окрестности этой точки функция непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$f(x)<f(x_0)\ \ (f(x)>f(x_0)).$$

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

*Теорема. (Необходимое условие существования экстремума)*

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=c$ и точка $x=c$ является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

*Критическими точками* функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

*Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a,b)$, который содержит критическую точку $x=c$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (за исключением, может быть, самой точки).

Если при переходе через точку $x=c$ слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “–“, то в точке $x=c$ функция

$f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “–“ на “+”, то функция имеет минимум.

### ***Выпуклость графика функции. Точка перегиба***

Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале $(a,b)$, если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой*, а кривая, обращенная выпуклостью вниз, – называется *вогнутой*.
*Теорема.* Если во всех точках интервала $(a,b)$ вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла), если во всех точках интервала $(a,b)$ вторая производная функции $f(x)$ положительна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вниз (вогнута).
Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

*Теорема. (Достаточные условия существования точек перегиба)*
Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку $x_0$, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой $x_0$ – точка перегиба.

### ***Асимптоты графика функции***

Прямая называется *асимптотой кривой*, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.
Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – *вертикальная асимптота кривой* $y = f(x)$.

Прямая $y = kx + b$ – *наклонная асимптота кривой*, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$.

### ***Схема исследования функций***

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции исследование проводят в следующей последовательности.

1) Определить область существования функции (это понятие включает в себя и область значений, и область определения функции).
2) Исследовать функцию на четность и нечетность. Тригонометрические функции исследовать на периодичность.
3) Исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва (если они имеются).
4) Найти интервалы возрастания и убывания функции. Определить экстремумы.
5) Найти интервалы выпуклости и вогнутости. Определить точки перегиба функции.
6) Найти асимптоты графика функции.
7) Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.
8) Построение графика.

## Образцы решения задач

**1.** *Исследовать на экстремум функцию* $y = x^2(1-x)^2$.

**Решение.** Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную $y'$ и приравняем ее нулю.

$$y' = \left(x^2(1-x)^2\right)' = \left(x^2\right)'(1-x)^2 + x^2\left((1-x)^2\right)' = 2x(1-x)^2 +$$
$$+ x^2 \cdot 2(1-x)(-1) = 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x) = 2x(1-x)[1-x-x] =$$
$$= 2x(x-1)(2x-1).$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Для наглядности результаты представим в виде таблицы изменения знака $y'$.

Таблица 5.1

| $x$ | $(-\infty;0)$ | 0 | $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2};1\right)$ | 1 | $(1;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | <0 | 0 | >0 | 0 | <0 | 0 | >0 |
| $y$ | Убыв. | min | Возр. | max | Убыв. | min | Возр. |

В первой строке таблицы указаны интервалы, на которые область определения функции разбивается точками, в которых $y' = 0$ и сами эти точки. Во второй строке указаны знаки производной $y'$ и интервалы монотонности. В третьей строке приведено заключение о поведении функции.

Из таблицы следует, что функция убывает при $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и возрастает при $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Поэтому исследуемая функция в точках $x = 0$ и $x = 1$ принимает свои минимальные значения, а при $x = \frac{1}{2}$ – максимальное. Найдем эти значения:

$y_{\min}(0) = 0$, $\quad y_{\min}(1) = 0$,

$$y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ответ: $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0, \quad y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

**2.** *Найти точки перегиба функции* $y = x \cdot e^{-x}$.

**Решение.** Так как точками перегиба являются те точки из области допустимых значений, где вторая производная $y''$ меняет знак, то сначала найдем $y'$, затем $y''$ и приравняем $y''$ нулю.

$$y' = \left(xe^{-x}\right)' = (x)' e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$y'' = (y')' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - \left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2),$$

$y'' = 0$ при $x = 2$, так как $e^{-x} > 0$ для всех значений $x$.

Для наглядности результаты представим в виде таблицы изменения знака $y''$.

Таблица 5.2

| $x$ | $(-\infty; 2)$ | 2 | $(2; \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | <0 | 0 | >0 |
| $y$ | Выпуклая | Точка перегиба | Вогнутая |

Так как в точке $x = 2$ производная $y''$ изменила знак, то функция $y$ изменила направление выпуклости, значит, это точка перегиба.
Ответ: $x = 2$ – точка перегиба.

**3.** *Найти асимптоты графика* $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$.

**Решение.** Так как вертикальную асимптоту имеет функция с разрывом 2-го рода в точке $x = x_0$, то сначала найдем точки разрыва и исследуем поведение функции в их окрестностях.
Область определения функции $x \neq -1$.
Значит, $x = -1$ – точка разрыва, так как функция в этой точке не определена. Найдем предел слева и справа функции $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ при подходе к точке $x = -1$. И выясним, разрыв какого рода терпит данная функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<-1}} \frac{2x^2}{x+1} = \begin{vmatrix} x+1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x+1} \to -\infty \end{vmatrix} = -\infty. \quad \text{Предел слева равен } -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>-1}} \frac{2x^2}{x+1} = \begin{vmatrix} x+1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x+1} \to +\infty \end{vmatrix} = +\infty. \quad \text{Предел справа равен } +\infty.$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то в точке $x = -1$ разрыв 2-го рода, поэтому уравнение вертикальной асимптоты $x = -1$.
Функция также может иметь или не иметь наклонные асимптоты. Если они есть, то их уравнение $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;
$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right)$.

Найдем правую и левую наклонную асимптоту при $x \to \pm\infty$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1} : x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1} = 2.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2 - 2x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2 - 2x^2 - 2x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(-2x)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{1} = -2.$$

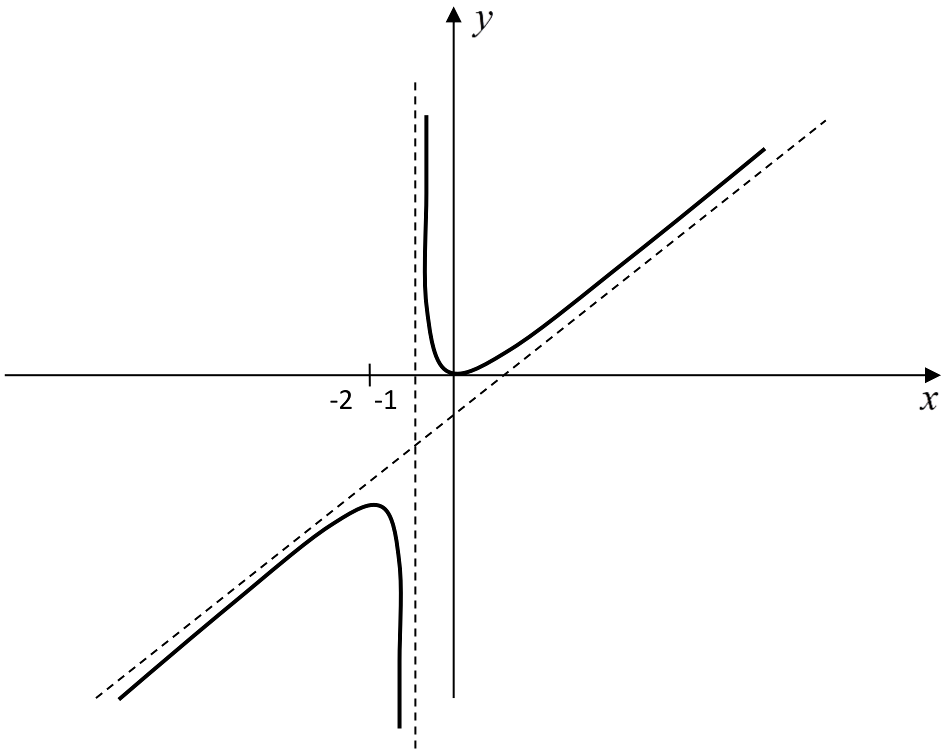

Рис. 5.1

Подставляем найденные значения $k$ и $b$ в уравнение асимптоты $y = kx + b$, получаем уравнение наклонной асимптоты $y = 2x - 2$.

Ответ: вертикальная асимптота $x = -1$; наклонная асимптота $y = 2x - 2$ (рис. 5.1).

**4**. *Исследовать функцию* $y = \dfrac{x^3}{2(x^2+1)}$ *и построить ее график.*

**Решение.** Исследование функции будем проводить по схеме.

1. Найдем область определения функции, и если есть, асимптоты. Так как $x$– любое действительное число, то нет точек разрыва, поэтому вертикальных асимптот нет.

2. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пусть $x = 0$, тогда $y = 0$. Точка $(0,0)$.

Проверим четность функции.

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{2\left((-x)^2+1\right)} = \frac{-x^3}{2(x^2+1)} = -y(x).$$

Значит, функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Исследуем монотонность функции с помощью $y'$.

$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x^2+1)}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

$y'=0$ при $x=0$, так как $x^2+3\neq 0$.

Таблица 5.3

| $x$ | $(-\infty;0)$ | 0 | $(0;\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | >0 | 0 | >0 |
| $y$ | Возрастает | Нет экстремума | Возрастает |

Получаем, что функция $y=\dfrac{x^3}{2(x^2+1)}$ всюду возрастающая, не имеющая точек экстремума, так как нет ни одной точки, в которой $y'$ равна нулю или бесконечности.

4. С помощью $y''$ находим точки перегиба.

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{1}{2}\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x(2x^2+3)(x^2+1)^2-2x(x^2+1)(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1)}{2}\cdot\frac{(2x^2+3)(x^2+1)-(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= x\cdot\frac{2x^4+3x^2+2x^2+3-2x^4-6x^2}{(x^2+1)^3} = x\cdot\frac{3-x^2}{(x^2+1)^3}.$$

$y''=0$ при $x=0$ и $3-x^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Таблица 5.4

| $x$ | $(-\infty;-\sqrt{3})$ | $-\sqrt{3}$ | $(-\sqrt{3};0)$ | 0 | $(0;\sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3};\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | >0 | 0 | <0 | 0 | >0 | 0 | <0 |
| $y$ | Вогн. | Точка перегиба | Выпук. | Точка перегиба | Вогн. | Точка перегиба | Выпук. |

Все точки, в которых $y''=0$, являются точками перегиба, так при переходе через них $y''$ меняет знак на противоположный. Найдем значения функции в этих точках:

$$y\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{2\left((-\sqrt{3})^2+1\right)}=\frac{-3\sqrt{3}}{2\cdot 4}\approx -0{,}65,\ y(0)=0,\ y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\approx +0{,}65.$$

5. Найдем наклонные асимптоты, если они есть, $y=kx+b$.
Сначала $x\to+\infty$, тогда

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2(x^2+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{2(x^2+1)'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{2}.$$ Теперь найдем

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-k(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2(x^2+1)}-\frac{x(x^2+1)}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-x}{2(x^2+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(x^2+1)'}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0\Rightarrow \mathrm{b}=0.$$

Получаем $y=\frac{x}{2}$ – уравнение правой асимптоты. Повторяя прежние рассуждения, уже при $x\to-\infty$ получим уравнение левой асимптоты $y=\frac{x}{2}$.

6. Теперь строим график функции, начертив сначала все асимптоты, отметив точки экстремума, точки перегиба и точки пересечения с осями координат.

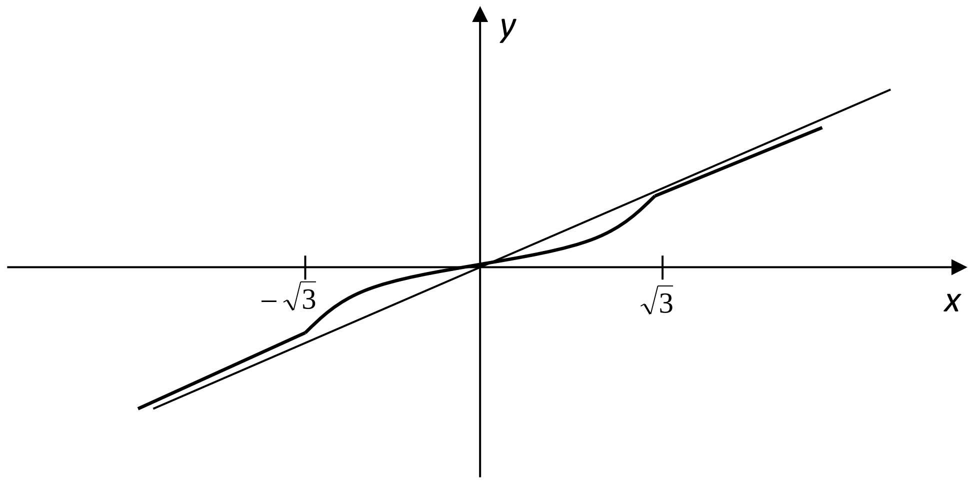


Рис. 5.2

**5.** *Исследовать функцию* $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ *и построить ее график.*

**Решение.** Находим область существования функции. Очевидно, что областью определения функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞). Точки $x=1$ и $x=-1$ являются точками разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$.

Следовательно, прямые, уравнения которых $x=1$, $x=-1$, являются вертикальными асимптотами графика функции.

Областью значений данной функции является интервал (–∞; ∞).

Находим критические точки.

Производная функции имеет вид

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}.$$

Решая уравнение $y'=0\Rightarrow x^4-3x^2=0$, получим критические точки: $x=0, x=\pm\sqrt{3}, x=\pm1.$

В таблице определяем знаки первой производной функции на промежутках, на которые область определения функции разбивается точками, в которых $y' = 0$.

Таблица 5.5

| $x$ | $(-\infty;-\sqrt{3})$ | $-\sqrt{3}$ | $(-\sqrt{3};-1)$ | $-1$ | $(-1;0)$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | >0 | 0 | <0 | Не сущ. | <0 | 0 |
| $y$ | Возр. | max | Убыв. | Не сущ. | Убыв. | |

Окончание табл. 5.5

| $x$ | $(0;1)$ | 1 | $(1;\sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3};\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | <0 | Не сущ. | <0 | 0 | >0 |
| $y$ | Убыв. | Не сущ. | Убыв. | min | Возр. |

Из таблицы следует, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой минимума. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)2x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

$y'' = 0$ при $x = 0$, так как $x^2 + 3 \neq 0$.

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках, на которые область определения функции разбивается точками, в которых $y'' = 0$. Составим таблицу знаков.

Таблица 5.6

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | $-1$ | $(-1;0)$ | 0 | $(0;1)$ | 1 | $(1;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | <0 | 0 | >0 | 0 | <0 | 0 | >0 |
| $y$ | Выпук. | Не сущ. | Вогн. | Точка перегиба | Выпук. | Не сущ. | Вогн. |

Так как в точке $x=0$ производная $y''$ изменила знак, то кривая изменила направление выпуклости, значит, это точка перегиба.
Про вертикальные асимптоты было уже сказано выше. Теперь найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты – $y=x$.
Строим график функции (рис.5.3).

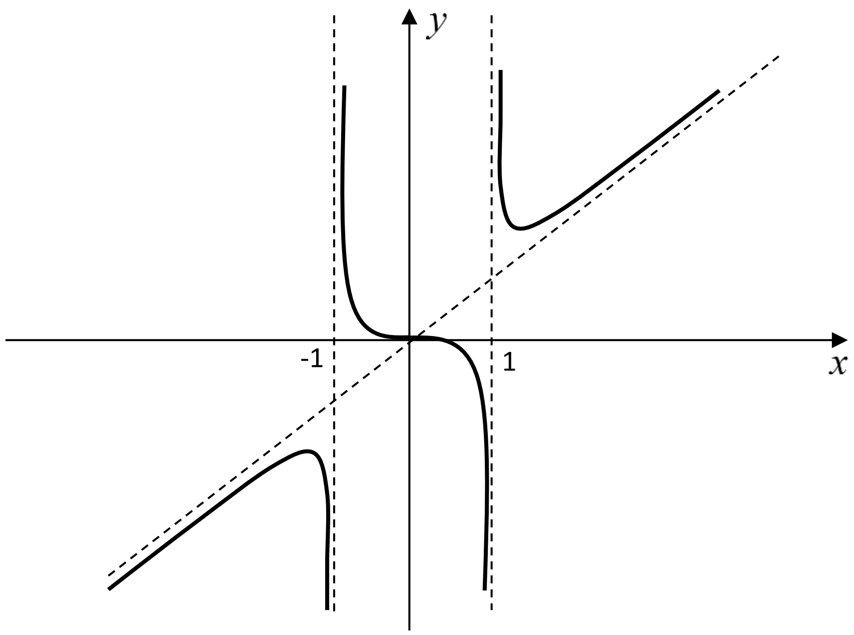


Рис. 5.3

## Расчетно-графическая работа № 2

1. Найти производные данных функций, используя правила вычисления производных.

1. а) $y=\sqrt[3]{3-4x^3}-\dfrac{2}{\sqrt{x-x^2}}$; б) $y=e^{\sqrt{x}}\sin^5 x$;

в) $y=(2x^5-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x^2}{2})^7$; г) $y=\log_3 \arcsin\dfrac{2}{x}$.

2. а) $y=(\dfrac{1}{2}x^4+2^{\cos x})\sqrt{x-\ln x}$; б) $y=\dfrac{4\sin^3 x}{\cos^2 x}-\lg\lg x$;

в) $y=\arccos e^{x-x^2}$; г) $y=(3x^2+\dfrac{5}{x}-6\sqrt[3]{x^2})^5$.

3. а) $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x}{3-x^2}}$; б) $y=\operatorname{ctg}^5 x-\dfrac{3}{\sin x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{3\ln x+1}$; г) $y=5^{\sin x}\cdot\ln(2x^3+1)$.

4. а) $y=(3x+5)\cdot\sqrt[3]{2-x-5x^3}$; б) $y=\dfrac{1}{5}\cos^5 x-\dfrac{4}{\sqrt{x^7}}$;

в) $y=\log_3(x+10^{-2x})$; г) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-ax-x^2}}$; б) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^4 x+4^{-x^2}$;

в) $y=e^{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x^5}$; г) $y=\cos\ln(x+\lg x)$.

6. а) $y=\sqrt{\dfrac{2+x^2}{2-x^2}}$; б) $y=2\arcsin^3\dfrac{5}{\sqrt{x}}$;

в) $y=3^{\operatorname{tg}x}\cdot(1-\lg x+\sqrt[3]{x^2})$; г) $y=\left(e^{1-x^2}+x-\dfrac{1}{x^3}\right)^5$.

7. а) $y=\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2+3}}-\sqrt[3]{x^7}+2x$; б) $y=(\cos\lg x+2)\cdot 10^{\sqrt{x}}$;

в) $y=x\cdot\sqrt{x+\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=\arccos^2\dfrac{1}{x}$.

8. а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{5x^2+2}$; б) $y=e^{-x^3}\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)$;

в) $y = 2^{\mathrm{arctg} x} \cdot \left( x + \sin \dfrac{1}{x} \right)$;

г) $y = \mathrm{ctg}^5 \ln x$.

9. а) $y = \dfrac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

б) $y = 2^{x - x^3} \cdot \sqrt{\ln x}$;

в) $y = \lg\left( x - \sqrt[3]{3x + 1} \right)$;

г) $y = 10 \mathrm{tg}^5 \dfrac{x}{5}$.

10. а) $y = \dfrac{xe^x + 1}{3x^5 - 3^x}$;

б) $y = \sqrt[4]{(2x - 5)^7} + \dfrac{1}{x^2} + x \cdot 10x^2$;

в) $y = (1 - \mathrm{tg}^2 2x) \cdot \ln \lg x$;

г) $y = \mathrm{arctg}\, e^{1 - x^3}$.

11. а) $y = \sqrt{\dfrac{x + 2\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 3}}$;

б) $y = \dfrac{1}{5} \mathrm{ctg}^5 x + \dfrac{5}{\ln x}$;

в) $y = \mathrm{arctg}\, 2^x \cdot (x - \sqrt[3]{2 - 3x})$;

г) $y = e^{\sin 5x^2}$.

12. а) $y = \mathrm{arctg} \sqrt{\dfrac{3 - x}{x + 2}}$;

б) $y = \cos^5 x \cdot 3^{-2x}$;

в) $y = \left( \arcsin \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^7$;

г) $y = \mathrm{tg}^4 \dfrac{x}{4} \cdot \lg \ln x$.

13. а) $y = 2\sqrt{ax - x^2} + \ln(x + ax^2)$;

б) $y = 3^{\sin x} \cdot \mathrm{arctg} \dfrac{1}{x^5}$;

в) $y = \mathrm{ctg} \dfrac{3x - 5}{x^2 + 2x}$;

г) $y = e^{\arccos \sqrt[3]{x}}$.

14. а) $y = \dfrac{\sqrt[3]{6x + 5}}{x - \sin 5x}$;

б) $y = \arcsin(x^3 \cdot \ln x)$;

в) $y = (x\sqrt{x} + e^{-x})^5$;

г) $y = \mathrm{arctg}\, 10^{\cos x}$.

15. а) $y = \sin \dfrac{2x + 1}{2 - x^3}$;

б) $y = \arccos^2 \dfrac{x^2}{4}$;

в) $y = \sqrt[3]{1 + e^x} \cdot \lg \mathrm{arctg}\, x$;

г) $y = e^{x - x^2} + \dfrac{3}{5x^2 - 3}$.

16. а) $y = \sqrt{\dfrac{2^x + 3}{x + 2^x}}$;

б) $y = \ln(1 - \cos^3 x)$;

в) $y = \arcsin \dfrac{5}{x^3} \cdot e^{1 - 2x}$;

г) $y = \lg \mathrm{arctg} \sqrt{x}$.

17. а) $y = (x \cdot \sqrt[3]{x} - \sin 3x)^5$;

б) $y = 5^{-x^3} \cdot \sqrt{\cos x}$;

в) $y = 4^{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \lg \ln x$;

г) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

18. а) $y = \sin \dfrac{1 - 3x^5}{2x^3 + 5}$;

б) $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^4 x \cdot \lg\left(\dfrac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} + 1\right)$;

в) $y = \arccos \sqrt{1 - x^4}$;

г) $y = 5^{\operatorname{arctg} x} \cdot (e^x + 2x)^5$.

19. а) $y = 2^{3 - x^3} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{5}{\sqrt{x}}$;

б) $y = \sqrt[3]{x - \ln x} - 2\cos^5 x$;

в) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{\sqrt{1 - \sqrt{x}}}$;

г) $y = e^{\arcsin x^2} - \dfrac{1}{\ln x}$;

20. а) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{\sqrt{x} + 2}{1 - x^2}$;

б) $y = 5^{\sin x} \cdot \left(\dfrac{1}{x^3} + 5x - 2\right)^7$;

в) $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg}^3 \lg x$;

г) $y = 5 \cdot \sqrt[5]{x - 1} + \log_2 (4x - 1) - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

21. а) $y = \dfrac{x + \sqrt{2 - x^2}}{2\sqrt{x} - 3}$;

б) $y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \arcsin \dfrac{5}{x}$;

в) $y = 7^{\cos \ln x} + (2x - e^x)^3$;

г) $y = \log_3 (x - \lg x)$.

22. а) $y = \dfrac{x}{x + \sqrt{x + 5}}$;

б) $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{ctg} \ln x$;

в) $y = 3 \cdot \sqrt[3]{ax - x^3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

г) $y = \arccos 5^{3x^2}$.

23. а) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 3^x}}$;

б) $y = (e^{\sin x} - x) \cdot \operatorname{arctg}^3 x$;

в) $y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{x^5}$;

г) $y = 10^{\sqrt{\arcsin x}}$.

24. а) $y = \cos \ln^3 x$;

б) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x - 2} \cdot \left(5x^2 - 3^{\sqrt{x}}\right)$;

в) $y = \dfrac{\sin 2x - 1}{x + \cos 2x}$;

г) $y = e^{\frac{1}{x}} + \sqrt[5]{\log_2 x}$.

25. а) $y = \dfrac{x - 10^x}{\sqrt{10 - x}}$;

б) $y = \arcsin^2 x \cdot (2x + 3)^5$;

в) $y = \operatorname{tg} \lg (a - x^4) + \dfrac{5}{x^3}$;

г) $y = 4^{\operatorname{arctg} x} + \sqrt[3]{x + \sqrt{x + 1}}$.

2. Исследовать функции и построить их графики

1. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.
2. $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.
3. $y = \dfrac{x^4+16}{2x^2}$.
4. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$.
5. $y = \dfrac{(x+1)(2-x)}{2x-3}$.
6. $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$.
7. $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.
8. $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$.
9. $y = \dfrac{x^2-1}{x-3}$.
10. $y = \dfrac{1-x^2}{x^2}$.
11. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.
12. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.
13. $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.
14. $y = \dfrac{x^3+3}{x^2-4x}$.
15. $y = \dfrac{x^3}{x^2-9}$.
16. $y = \dfrac{x^2+5}{x}$.

17. $y=\dfrac{x^3-4}{4x^2}$.

18. $y=\dfrac{x^2-5x}{x+1}$.

19. $y=\dfrac{3-x^2}{x-2}$.

20. $y=2x+\dfrac{8}{x}$.

21. $y=\dfrac{8x}{16-x^2}$.

22. $y=\dfrac{x^2+1}{(x-3)^2}$.

23. $y=\dfrac{x^2-5x+3}{x+2}$.

24. $y=\dfrac{3x}{(x-4)^2}$.

25. $y=\dfrac{2x+1}{(x+5)^2}$.