3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Неопределенный интеграл

Функцию $y = F(x)$, заданную на промежутке X, называют *первообразной для функции* $y = f(x)$, заданной на том же промежутке, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – постоянное число.

Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается так: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Операция нахождения первообразной по её производной или неопределённого интеграла по заданной подынтегральной функции называется интегрированием этой функции. Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
3. $\int df(x)dx = f(x)+C$;
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$; (k–постоянная);
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Заметим, что последнее свойство справедливо для любого числа слагаемых в подынтегральной функции.

Таблица основных неопределенных интегралов

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ где $n \neq -1$;

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

III. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

IV. $\int e^x \, dx = e^x + C$;

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

VI. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arctg} x + C \end{cases}$;

VII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$;

VIII. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$;

IX. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$;

X. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

XI. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

XII. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + C$

XIII. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.

Интегралы этой таблицы принято называть табличными.

Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с использованием основных свойств неопределенных интегралов и таблицы основных неопределённых интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной интегрирования является одним из самых эффективных приёмов сведения неопределённого интеграла к табличному. Такой приём называется также методом подстановки.

Теорема 1. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T, а X - некоторое множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве X, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Выражение (1.1) называется формулой замены переменной в неопределённом интеграле.

Интегрирование по частям

Теорема 2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на промежутке X, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \tag{1.2}$$

С учётом определения дифференциалов функций равенство (1.2) можно переписать в виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1.3}$$

Равенство (1.2) или (1.3) называется формулой интегрирования по частям.

Формулу интегрирования по частям можно применять многократно.

Рекомендации по использованию метода интегрирования по частям

В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax}\,dx,\ \int P(x)\sin ax\,dx,\ \int P(x)\cos ax\,dx,$$

где $P(x)$ – многочлен относительно x, a – некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители принимают за dv.

В интегралах вида

$$\int P(x)\ln|ax|\,dx,\ \int P(x)\arcsin ax\,dx,\ \int P(x)\arccos ax\,dx,$$

$$\int P(x)\operatorname{arctg} ax\,dx,\ \int P(x)\operatorname{arcctg} ax\,dx$$

полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители полагают равной функции u.

Интегрирование тригонометрических функций

Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, которую будем называть универсальной, рационализирует интеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$, т. е. сводит его к интегралу от рациональной дроби нового аргумента *t;* при такой подстановке

$$\sin\ x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=2\left(\operatorname{arctg}\ t\ \right)'dt=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Интегралы вида $\int\sin ax\cos bx\,dx$, $\int\sin ax\sin bx\,dx$, $\int\sin ax\cos bx\,dx$ вычисляются с использованием формул тригонометрии

$$\sin ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right);$$

$$\sin ax\cdot\sin bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right);$$

$$\cos\ ax\cdot\cos\ bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right).$$

При вычислении интеграла $\int\sin^m x\cos^n xdx$, m и n – четные натуральные числа, применяем формулы понижения степени

$$\cos^2 kx=\frac{1+\cos 2kx}{2},\quad \sin^2 kx=\frac{1-\cos 2kx}{2},$$

которые позволяют повторным уменьшением вдвое показателей степеней синуса и косинуса в конечном счете свести рассматриваемые интегралы к сумме интегралов от констант и нечетных степеней синуса и косинуса.

Образцы решения задач

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}$.

Решение. Преобразуем данный интеграл к табличному виду, воспользовавшись действиями со степенями:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C.$$

Пример 2. Найти $\int(\frac{2}{1+x^2}+6x-3x^2+7)dx$.

Решение. Преобразуем данный интеграл к табличному виду, воспользовавшись свойствами 4 и 5

$$\int\left(\frac{2}{1+x^2}+6x-3x^2+7\right)dx=2\int\frac{dx}{1+x^2}+6\int xdx-3\int x^2dx+7\int dx=$$

$$=2\operatorname{arctg}x+6\cdot\frac{x^2}{2}-3\cdot\frac{x^3}{3}+7x+C$$

Пример 3. Найти $\int\cos 3xdx$.

Решение. Умножаем и делим интеграл на 3 и вносим множитель 3 под знак интеграла, затем под знак дифференциала:

$$\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int\cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

Пример 4. Найти $\int(3-2x)^7dx$.

Решение. Умножаем и делим интеграл на –2 и вносим множитель –2 под знак интеграла, затем заменим $-2dx$ через $d(3-2x)$, получим

$$\int(3-2x)^7dx=-\frac{1}{2}\int(3-2x)^7d(3-2x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^8}{8}+C.$$

Пример 5. Найти $\int\frac{2x^2+x-3}{x^3}dx.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель на знаменатель. Затем интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$\int\frac{2x^2+x-3}{x^3}dx=2\int\frac{dx}{x}.+\int x^{-2}dx-3\int x^{-3}dx=2\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}+C.$$

Пример 6. Найти $\int\sin(3x+1)dx.$

Решение. Целесообразно ввести новую переменную $t=3x+1$. Тогда $dt=3dx$ или $dx=\frac{1}{3}dt$. Отсюда по формуле (1.1) получаем

$$\int\sin(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int\sin tdt=-\frac{1}{3}\cos t=-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C.$$

Пример 7. Найти $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2x}$.

Решение. Введём новую переменную $t=\cos x$. Тогда $dt=-\sin xdx$ или $\sin x\,dx=-dt$. В результате подстановки исходный интеграл преобразуется к табличному виду

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2}\,dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Пример 8. Найти $\int x\sqrt{x-3}\;dx.$

Решение. С целью упрощения подынтегрального выражения положим $x-3=t^2$. Отсюда $x=t^2+3$, $dx=d\left(t^2+3\right)$, $dx=d\left(t^2+3\right)'\,dt$, $dx=\left[(t^2)'+3'\right]dt$, $dx=[2t+0]dt$, $dx=2t\,dt$. Заменим под знаком интеграла x, $x-3$ и dx, затем выполним преобразования и получаем

$$\int x\left(\sqrt{x-3}\right)dx = \int\left(t^2+3\right)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = \int\left(2t^4+6t^2\right)dt = 2\int t^4dt + 6\int t^2dt =$$

$$= 2\int t^4dt + 6\int t^2dt = 2\frac{t^{4+1}}{4+1} + 6\frac{t^{2+1}}{2+1} + C = \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5 +$$

$$+2\left(\sqrt{x-3}\right)^3 + C.$$

Пример 9. Найти $\int \frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+C}}.$

Решение. Заметим, что $e^{4x}=\left(e^{2x}\right)^2$. Целесообразно ввести переменную $e^{2x}=t$. Тогда $de^{2x}=dt$, $\left(e^{2x}\right)'dx=dt$, $e^{2x}2dx=dt$.

Заменив всюду под интегралом $e^{2x}dx$ на $\frac{dt}{2}$, e^{2x} на t, получим

$$\int \frac{3dt}{2\sqrt{t^2+5}} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5}} = \frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right| + C = \frac{3}{2}\ln\left|e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+5}\right| + C.$$

Пример 10. Найти $\int \frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}.$

Решение. Введём переменную $t=\cos x$. Тогда $dt=-\sin x dx$. Заменив всюду под интегралом $\sin x\,dx$ на $-dt$, $\cos x$ на t, получим

$$\int \frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}} = -2\int \frac{dt}{\sqrt{3+t^2}} = -2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right| + C =$$

$$-2\ln\left|\cos x+\sqrt{3+\cos^2 x}\right| + C.$$

Пример 11. Найти $\int (x-3)\sin x\,dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям. Положим $u=x-3$, $dv=\sin x\,dx$, тогда $du=dx$, $v=\int \sin x\,dx=-\cos x$, по формуле (1.3) получим

$$\int (x-3)\sin x\,dx = -(x-3)\cos x + \int \cos x\,dx = (3-x)\cos x + \sin x + C.$$

Пример 12. Найти $\int\left(5x^3+2x^2+3\right)\ln|x|\,dx$.

Решение. Положим $u=\ln|x|$, $dv=\left(5x^3+2x^2+3\right)dx$, тогда

$du=\left(\ln|x|\right)'dx=\dfrac{1}{x}dx, \int dv=\int\left(5x^3+2x^2+3\right)dx$, откуда

$$v=\int\left(5x^3+2x^2+3\right)dx=5\int x^3\,dx+2\int x^2\,dx+3\int dx=5\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\frac{x^{2+1}}{2+1}+3x=$$

$$=\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x.$$

Следовательно,

$$\int\left(5x^3+2x^2+3\right)\ln|x|\,dx=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\int\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\left[\frac{5}{4}\int\frac{x^4}{x}dx+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{x}dx+3\int\frac{x}{x}dx\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\left[\frac{5}{4}\int x^3\,dx+\frac{2}{3}\int x^2\,dx+3\int dx\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\frac{5}{4}\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}-3x+C=$$

$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\frac{5}{16}x^4-\frac{2}{9}x^3-3x+C.$$

Пример 13. Найти $\int\sin 7x\cos x\,dx$.

Решение. Преобразуем произведение тригонометрических функций по формуле

$$\int\sin 7x\cos x\,dx=\int\frac{1}{2}\left(\sin(7+1)x+\sin(7-1)x\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 8x\,dx+\frac{1}{2}\int\sin 6x\,dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\sin t\,dt+\frac{1}{12}\int\cos z\,dz=-\frac{1}{16}\cos t+\frac{1}{12}\cos z+C=$$

$$-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{12}\cos 6x+C.$$

При вычислении воспользовались заменой переменных

$t=8x$, $dt=d(8x)$, $dt=\left(8x\right)'dx$, $dt=8dx$, $dx=\dfrac{dt}{8}$, и $z=6x$, $dz=d6x$,

$dz=6dx$, $dx=\dfrac{dz}{6}$.

Пример 14. Найти $\int\cos^4 x\,dx$.

Решение. Заметим, что $\cos^4 x = \left[\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right]^2$. Следовательно,

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx^{*)} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \cos t\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{4}x +$$

$$\frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx^{**)} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}x +$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin u + C = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

*) Делаем подстановку $t = 2x,\ dt = 2dx, dx = \dfrac{dt}{2}$.

**) Делаем подстановку $u = 4x,\ du = 4dx,\ dx = \dfrac{du}{4}$.

Пример 15. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos x}$.

Решение. Полагая $tg\,\dfrac{x}{2} = z$ и заменяя $\cos x, dx$ через z указанными их выражениями, вытекающими из этой подстановки, получим

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = 2\int \frac{dz}{z^2+9} = \frac{2}{3}arctg\,\frac{z}{3} + C = \frac{2}{3}arctg\left(\frac{1}{3}tg\,\frac{x}{2}\right) + C.$$

§.2. Определенный интеграл

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется *определенным интегралом* от a до b функции $f(x)$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Числа a и b называются *пределами интегрирования*: a – нижним, b – верхним. Отрезок $[a;b]$ называется отрезком интегрирования.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а переменная x – *переменной интегрирования*.

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1.4)$$

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in (a,b)$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_b^b f(x)dx = 0$.

4. Если $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

5.Если $m \leq f(x) \leq M$ при всех x из промежутка $[a;b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Правила вычисления определенных интегралов

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, ($k$ – постоянная).

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. Интегрирование по частям

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \qquad (1.5)$$

4. Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ делается по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(\varphi'(t))dt, \qquad (1.6)$$

где $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ (f,φ и φ' непрерывны)

Приемы вычисления определенных интегралов практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, надо не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Вычисление площадей плоских фигур

Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$. Если график расположен ниже оси Ox, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+” (рис. 1.1).

Для нахождения суммарной площади используется формула

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \qquad (1.7)$$

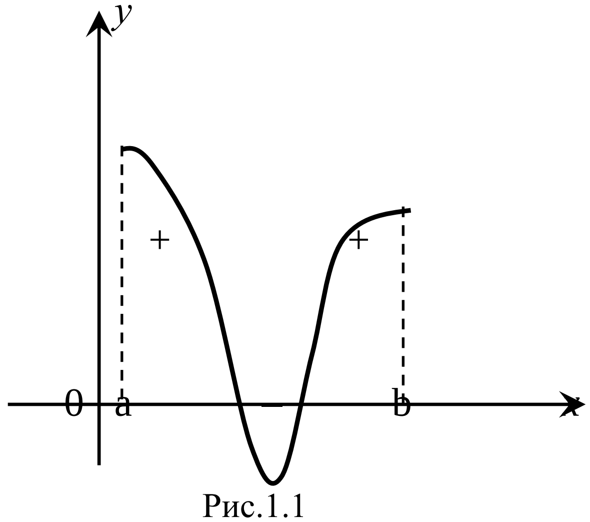

Рис.1.1

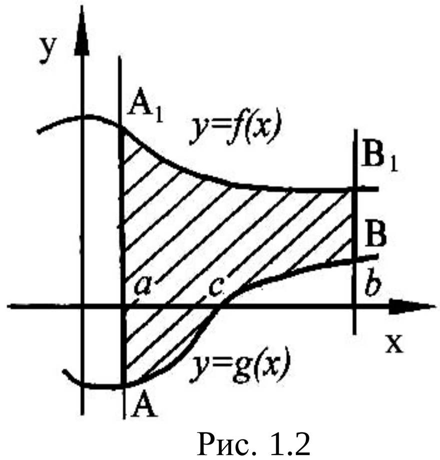

Рис. 1.2

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ (сверху), $y = g(x)$ (снизу) и прямыми $x = a$, $x = b$, подсчитывается по формуле

$$S = \int_b^b [f(x) - g(x)]\,dx. \tag{1.8}$$

Действительно, в силу геометрического смысла определенного интеграла из рисунка имеем

$\int_a^b f(x)\,dx = S_{(aA_1B_1b)}$ и $\int_a^b g(x)\,dx = S_{(cBd)} - S_{(aAc)}$, поэтому

$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^b g(x)\,dx = S_{(aA_1B_1b)} - S_{(cBb)} + S_{(aAc)} = S.$

Образцы решения задач

Пример 1. Вычислить $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx$.

Решение. Используя правила 1 и 2, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx = \int_1^4 dx + 5\int_1^4 x\,dx + \frac{3}{2}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = x\Big|_1^4 + 5\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 + \frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4 =$$

$$= x\Big|_1^4 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 + x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = (4-1) + \frac{5}{2}\left(4^2 - 1^2\right) + \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = 3 + \frac{75}{2} + 7 = \frac{95}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$, Следовательно

$du = (\operatorname{arctg} x)'\,dx = \frac{1}{1+x^2}\,dx, v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$. Тогда по формуле (1.5)

$$\int_0^1 (x \operatorname{arctg} x)\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{0^2}{2}\operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $t = x^2+9$, тогда $dt = d\left(x^2+9\right)$, $dt = 2x\,dx$, $dx = \dfrac{dt}{2x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = x^2+9$. Поэтому если $x=0$, то $t_1 = 0^2+9 = 9$, если $x=4$, то $t_2 = 4^2+9 = 25$ и получаем

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_9^{25} x\sqrt{t}\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_9^{25} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_9^{25} = \frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{25}^3 - \sqrt{9}^3\right) = \frac{1}{3}\left(5^3 - 3^3\right) = \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}.$$

Пример 4. Вычислить $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

Решение. Положим $1-\cos x = t$, тогда $dt = (1-\cos x)'\,dx$, $dt = \sin x\,dx$, $dx = \dfrac{dt}{\sin x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = 1-\cos x$: если $x = \dfrac{\pi}{2}$, то $t_1 = 1-\cos\dfrac{\pi}{2} = 1-0 = 1$, если $x=\pi$, то $t_2 = 1-\cos\pi = 1-(-1) = 2$. Следовательно,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2} = \int_1^2 \frac{2\sin x\,\frac{dt}{\sin x}}{t^2} = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = 2\int_1^2 t^{-2}dt = 2\,\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^2 = 2\,\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^2 =$$

$$=-2\left(\frac{1}{2}-1\right)=-2\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

Решение. Положим $8-x=t$, тогда $dt=(8-x)'dx$, $dt=-1dx$, $dx=-dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t=8-x$, если $x=0$, то $t_1=8-0=8$, если $x=7$, то $t_2=8-7=1$. Таким образом,

$$\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}=\int\limits_8^1 -\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}=-\int\limits_8^1 t^{-\frac{2}{3}}dt=-\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Big|_8^1=-\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_8^1=-3\sqrt[3]{t}=-3\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{8}\right)=$$

$$-3(1-2)=3.$$

Пример 6. Вычислить $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u=\ln x$, $dv=x\,dx$, тогда $du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx$, $v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$.

Следовательно, по формуле (1.5)

$$\int\limits_1^e (x\ln x)dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1^2}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\int\limits_1^e x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}.$$

Пример 7. Вычислить площадь между параболами $y=4x-x^2$ *и* $y=x^2-6$.

Решение. Строим графики функций. Затем для нахождения точек пересечения парабол решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=4x-x^2; \\ y=x^2-6. \end{cases}$$

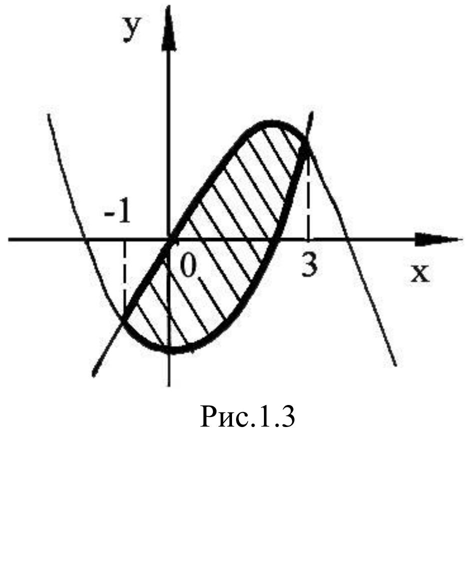

Рис.1.3

Приравнивая левые части, получим

$$x^2-6=4x-x^2 \text{или}$$

$x^2-2x-3=0$ и $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-4(-3)}}{2}=\dfrac{2\pm 4}{2}$ или $x_1=-1; x_2=3$.

Тогда по формуле (1.8) искомая площадь S будет равна: $S=\int\limits_{-1}^{3}\left[\left(4x-x^2\right)-\left(x^2-6\right)\right]dx=\int\limits_{-1}^{3}\left[6+4x-2x^2\right]dx=\left[6x+2x^2-\dfrac{2}{3}x^3\right]\Big|_{-1}^{3}=$

$=\left[6\cdot 3+2\cdot 3^2-\dfrac{2}{3}\cdot 3^3\right]-\left[6\cdot(-1)+2\cdot(-1)^2-\dfrac{2}{3}\cdot(-1)^3\right]=18-\left[-\dfrac{10}{3}\right]=$

$=18+\dfrac{10}{3}=64.$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2,\ y=\dfrac{1}{x^2},\ y=0,\ x=2\ (x\ge 0)$.

Решение. Сначала найдем точки пересечения кривых $y=x^2$ и $y=\dfrac{1}{x^2}$, для чего решим систему уравнений

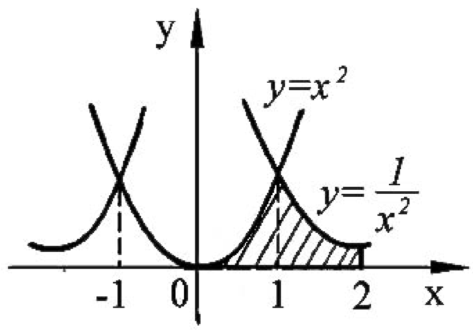

Рис. 1.4

$$\begin{cases} y=x^2; \\ y=\dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Из этой системы $x^2=\dfrac{1}{x^2},\quad x^4=1$ или $x_1=-1,\ x_2=1$.

Таким образом, заданная фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции

$$f(x)=\begin{cases} y=x^2,\ 0\le x<1, \\ y=\dfrac{1}{x^2},\ 1\le x\le 2. \end{cases}$$

По формуле вычисления площади (1.7) найдём

$S=S_1+S_2=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^2\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{x^{2+1}}{2+1}\Big|_0^1+\int\limits_1^2 x^{-2}dx=\dfrac{x^{-2}}{3}\Big|_0^1+\dfrac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^2=$

$=\left(\dfrac{1}{3}-0\right)+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{-1}{1}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{5}{6}.$

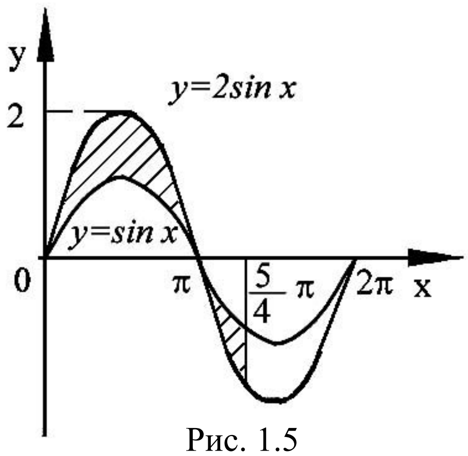

Рис. 1.5

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x, y=2\sin x,\ x=\frac{5}{4}\pi,\ x=0$.

Решение. Искомая площадь S равна сумме площадей S_1 и S_2 двух фигур, первая из которых ограничена линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, вторая ограничена линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$.

Вычислим площади S_1 и S_2:

$$S_1=\int_0^{\pi}(2\sin x-\sin x)dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=$$
$$=-(-1)-(-1)=1+1=2.$$

$$S_2=\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-2\sin x)dx=-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin x\,dx=\cos x\Big|_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}=$$
$$=\cos\frac{5}{4}\pi-\cos\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1.$$

Тогда $S=S_1+S_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}293.$

§3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $a<b<\infty$, то полагают

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^{b}f(x)dx.$$

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty}f(x)dx$ называется *сходящимся*, если существует предел правой части равенства, и называется *расходящимся*, если указанный предел не существует. Аналогично, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $-\infty<a<b$, то полагают

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Наконец, если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$ числовой оси, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Признаки сходимости несобственных интегралов

Интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$; $(a>0)$

а) сходится, если $|f(x)| \le \dfrac{M}{x^m}$ и $m>1$,

б) расходится, если $|f(x)| \ge \dfrac{M}{x^m}$ и $m \le 1$.

Здесь M и m – постоянные.

Образцы решения задач

Пример 1. *Вычислить* $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}$.

Решение. По определению несобственного интеграла имеем

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b} x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}-(-1)\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} + \lim_{b\to\infty}1 = 0+1=1.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Пример 2. *Вычислить* $\int\limits_{a}^{\infty}\dfrac{dx}{x}$; $(a>1)$.

Решение. По определению имеем

$$\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln a) = \infty - \ln a = \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 3. *Установить сходимость или расходимость интеграла* $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}dx$.

Решение. Так как $|\cos x| \le 1$, то $\left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right| \le \dfrac{1}{x^3}$, т.е. подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $|f(x)| \le \dfrac{M}{x^m}$ при $m = 3 > 1$ и $M \le 1$. Следовательно, интеграл сходится.

Расчётно-графическая работа №3

1.Найти интегралы.

1.1. а) $\int\left(\dfrac{x^2 - 3\sqrt{x}}{x^3} + \dfrac{1}{x^2 - 5}\right)dx$; б) $\int\dfrac{3x^2\,dx}{(1-5x^3)^3}$;

в) $\int(7x-3)e^{2x}dx$; г) $\int \cos^2 5x\,dx$.

1.2. а) $\int\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{x} - \dfrac{2}{x^2+3}\right)dx$; б) $\int y\sqrt{3y^2+1}\,dy$;

в) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; г) $\int \sin^2\dfrac{3}{4}x\,dx$.

1.3. а) $\int\left(\dfrac{2-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} + \dfrac{7}{\sqrt{8-x^2}}\right)$; б) $\int(1-3x)e^{2x-3x^2}dx$;

в) $\int(2x-3)\cos 4x\,dx$; г) $\int\sin 2x\cos 4x dx$.

1.4. а) $\int\left(\dfrac{1-x^5}{x^4} + \dfrac{2}{x^2-5}\right)dx$; б) $\int\dfrac{x\,dx}{(x^2+9)^3}$;

в) $\int\sqrt{x^3}\ln x dx$; г) $\int\sin\dfrac{2}{3}x\cos\dfrac{3}{2}x dx$.

1.5. а) $\int\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{x}} + 3^{x+1} + \dfrac{1}{10-x^2}\right)dx$; б) $\int x\cos(5x^2-3)dx$;

в) $\int(3x-2)\cos 5x dx$; г) $\int\sin^2\dfrac{2x}{5}dx$.

1.6. а) $\int\left(\dfrac{3}{\sqrt{5-x^2}} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{2}{x^3}\right)dx$; б) $\int\dfrac{2x^2\,dx}{5-2x^3}$;

в) $\int(x^5+2x-1)\ln x dx$; г) $\int\sin\dfrac{3}{5}x\cos 3x dx$.

1.7. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{\mathrm{arctg}x}}$;

в) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}dx$; г) $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2x}{3}\,dx$.

1.8. а) $\int\left(\frac{x+x^2\cos x-5}{x^2}+\frac{1}{3-x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int(3x^2-2x)\ln x dx$; г) $\int\sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{5}\,dx$.

1.9. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{3}{x+2}-x\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\frac{3\ln^5 x+5x-2}{x}dx$;

в) $\int(3-2x)\cos 7x dx$; г) $\int\cos^2\frac{3x}{5}\cdot\sin\frac{x}{5}\,dx$.

1.10. а) $\int\left(\frac{1}{x^2-7}+3\cdot 2^x-\frac{1}{\sqrt{x^5}}\right)dx$; б) $\int\frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}x+3}-x}{x^2+1}dx$;

в) $\int(4\sqrt{x}+3)\ln x dx$; г) $\int\cos 2x\cos\frac{3x}{4}dx$.

1.11. а) $\int\left(\frac{3x^3-xe^x+2}{x}-\frac{1}{\sqrt{7-x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{3x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int\frac{3-\ln x}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$; г) $\int\cos\frac{2x}{7}\cos\frac{3x}{5}\,dx$.

1.12. а) $\int\left(\frac{3-x\cdot 7^x}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^2+3}\right)dx$; б) $\int e^{2x^3-5}\cdot x^2dx$;

в) $\int(3-4x)\sin\frac{x}{5}dx$; г) $\int(\sin 3x+\cos^2\frac{3x}{4})dx$.

1.13. а) $\int\left(\frac{3-2\cos^3 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{8-x^2}-\sqrt[7]{x^3}\right)dx$; б) $\int 3^{5x^2+2x-3}(5x+1)dx$;

в) $\int(1-3x)e^{-3x}dx$; г) $\int\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{2}{7}x dx$.

1.14. а) $\int\left(\frac{2x-5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-6}}-4^{x+1}\right)dx$; б) $\int\frac{3-\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 x}}{\cos^2 x}dx$;

в) $\int(\sqrt{x^3}+3)\ln x dx$; г) $\int\sin^2 2x\cos^2 2x dx$.

1.15. а) $\int\left(\frac{(x+1)^2}{x^2}+\frac{1}{8-x^2}-5^{x+1}dx\right)$;　б) $\int e^{3x}(e^{3x}+5)^7\,dx$;

в) $\int(2-5x)\sin 5x dx$;　г) $\int\cos\frac{2x}{9}\cos\frac{3x}{5}dx$.

1.16. а) $\int\left(\frac{x\cdot 3^x+2\sqrt{x}-5}{x}+\frac{3}{x^2+11}\right)dx$;　б) $\int\frac{x^5dx}{\sqrt[3]{1-5x^6}}$;

в) $\int e^x(x^2+3x+2)dx$;　г) $\int\sin 3x\cos\frac{2x}{5}\mathrm{tg}\frac{2x}{5}\,dx$.

1.17. а) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}+(\sqrt[3]{x}-2)^3-\frac{1}{x^3}\right)dx$;　б) $\int\frac{\mathrm{tg}^3x+5}{\cos^2 x}dx$;

в) $\int(3x^2-4x+3)\ln x dx$;　г) $\int(\cos\frac{x}{4}+\cos^2\frac{3x}{8})dx$.

1.18. а) $\int\left(\frac{5}{x^2+7}-x\cdot\sqrt[3]{x}+2^{x+1}\right)dx$;　б) $\int\frac{3x^2-2+e^{1/x}}{x^2}dx$;

в) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[7]{x^4}}dx$;　$\int\sin 2x\cos 3x\cos 5x dx$

1.19. а) $\int\left(\frac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$;　б) $\int\frac{\sin x dx}{(3\cos x-5)^5}$;

в) $\int(x-\pi)\cos\pi x dx$;　г) $\int\sin\frac{2x}{5}\sin\frac{5x}{3}\,dx$.

1.20. а) $\int\left(\frac{2-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{2-x^2}}+2^{x+2}\right)dx$;　б) $\int\frac{3+(5ctgx-3)^{10}}{\sin^2 x}\,dx$;

в) $\int(3-8x)e^{-2x}dx$;　г) $\int\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{5x}{7}\,dx$.

1.21.а)
$\int\left(\frac{x^2-9}{3-x}+\frac{1}{x^2-9}+2x\sqrt{x}-3^{x+1}\right)dx$;　б) $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{3\sin x-5}}$;

в) $\int(2x-3)e^{4x}dx$;　г) $\int\sin 2x\cos^2\frac{3x}{4}dx$.

1.22. а) $\int\left(\frac{(2x+3)^2}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{5}{x}\right)dx$;　б) $\int\frac{2e^{\sqrt{x}}+3\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int (x^2 - x + 3)\ln x dx$;

г) $\int \sin\frac{x}{3}\cos^2 x dx$.

1.23. а) $\int\left(\frac{2}{x^2-2} + (2\sqrt{x}-5)^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$;

б) $\int x\sin(3-5x^2)dx$;

в) $\int (2-x^2)e^{2x}dx$;

г) $\int \cos\frac{x}{5}\cos\frac{4x}{5}dx$.

1.24. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} + \frac{3x-2}{\sqrt[3]{x}} - 2^{x+3}\right)dx$;

б) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 5}$;

в) $\int (3x^2 - 1)\ln x dx$;

г) $\int \sin 2x\cos 2x\sin\frac{x}{2}dx$.

1.25. а) $\int\left(\frac{1-5x}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{2^{x+1}}{3^x}\right)dx$;

б) $\int \frac{2x-1}{\sqrt[5]{x^2-x}}dx$;

в) $\int (x+1)^2\ln(x+1)dx$;

г) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{2x}{3}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

3.1. $y = (x+1)^2, y = -x+1.$

3.2. $y = \frac{1}{x^2+1}$ и $y = \frac{1}{2}x^2.$

3.3. $y = x^2/2, y = x^3/8.$

3.4. $y = 3 - 2x - x^2, y = 0.$

3.5. $y^2 = x+1$ и $y^2 = 9 - x.$

3.6. $y = 3 + 2x - x^2$ и $y = x^2 - 4x + 3.$

3.7. $y = \frac{6}{x}, \quad x + y = 7.$

3.8. $3x - y = 0, \quad y = 4 - x^2.$

3.9. $y = 4 - x^2$ и $x + y = 2.$

3.10. $y = \frac{x^3}{4}, \quad y = 2x.$

3.11. $y = (x+1)^2, y = (x-1)^2.$

3.12. $y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7.$

3.13. $y = 2x - x^2,\ y = -x + 2,\ x = 0.$

3.14. $y = 3x - x^2,\ y + x = 3,\ x = 0.$

3.15. $y = 5 - x^2, \ y = 3 - x.$

3.16. $y = 4 - x^2, \ y = 8 - 2x^2.$

3.17. $xy = 4, x + 4y - 10 = 0.$

3.18. $y = x^2 + 2x, y = 2 - x; x = 0; x = -2.$

3.19. $y = 2x - x^2, y = 5x - 4.$

3.20. $y = 2 - \frac{x^2}{2}, y + x = 2.$

3.21. $y = \sqrt{x},\ x + y = 2,\ y = 0.$

3.22. $y = x^2 + 1;\ y = 9 - x^2.$

3. 23. $y = x,\ y = \frac{1}{8}x,\ y = \frac{1}{x^2}.$

3.24. $y = x^2 + 2x - 3,\ y = 1 - x.$

3.25. $y = x^3 + 2,\ y = 2 - x^2.$

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

4.1. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \cdot dx$

4.1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 4}$

4.3. $\int_0^{\infty} x 2^{-x^2} dx$

4.4. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-3}} \cdot dx$

4.5. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \cdot dx$

4.6. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{9+x^2}$

4.7. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot dx$

4.8. $\int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot dx$

4.9. $\int_1^{\infty} \frac{1+x^2}{x^3} \cdot dx$

4.10. $\int_4^{\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-9}} \cdot dx$

4.11. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$

4.12. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \cdot dx$

4.13. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot dx$

4.14. $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$

4.15. $\int_1^{\infty} \frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot dx$

4.16. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^2 + 9}$

4.17. $\int_3^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \cdot dx$

4.18. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} \cdot dx$

4.19. $\int_3^{\infty} \frac{x}{(x^2-4)^3} \cdot dx$

4.20. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot dx$

4.21. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

4.22. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$

4.23. $\int_1^{2} \frac{dx}{x \ln x}$

4.24. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}} \cdot dx$

4.25. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^3} \cdot dx$