Литература:

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. для студентов вузов, обучающихся по направлению подгот. дипломир. специалистов "Информатика и вычислит. техника" / А.Б. Сергиенко. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007.

2. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций: учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлению подгот. дипломир. специалистов 654400 – Телекоммуникации / А.И. Солонина [и др.]. – 2-е изд., [испр. и перераб.]. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – XIV, 753 с.

3. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер ; пер. с англ. С.А. Кулевова под ред. А.С. Ненашева. – М.: Техносфера, 2012.

4. Соловьев, Н. Цифровая обработка информации в задачах и примерах: учебное пособие / Н. Соловьев, Н.А. Тишина, Л.А. Юркевская. – Оренбург: ОГУ, 2016. – 123 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485398

5. Смоленцев Н.К. Введение в теорию вейвлетов. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 292 с.

6. Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы обработки сигналов. – М.: РИЦ "Техносфера", 2009. – 480 с.

С математической точки зрения сигнал – это функция, показывающая зависимость одной величины от другой, причем эта зависимость должна быть нам чем-то интересна, она должна содержать информацию о каком-то процессе или явлении. Так, звук – это зависимость давления воздуха от времени, а изображение – зависимость яркости и цвета от пространственных координат. И то, и другое мы можем рассматривать как некие сигналы.

Обработка сигналов – это их преобразование *в другие сигналы* или в числовые значения – как правило, для того, чтобы извлечь из них какую-то полезную информацию. Например, при телефонном разговоре мы хотим по возможности очистить голос собеседника от посторонних шумов, а принимая сигнал, излучаемый навигационным спутником ГЛОНАСС или GPS, хотим узнать момент его прихода, чтобы измерить расстояние до спутника и благодаря этому определить свои координаты.

Исходно обработка электрических сигналов осуществлялась электрическими цепями, состоящими из резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности и электронных приборов – сначала ламп, а затем транзисторов. При этом разработчику нужно было пытаться как-то приспособить физические свойства этих элементов для того, чтобы приближенно выполнить необходимые операции над сигналами.

Но в середине двадцатого века произошла революция: появились компьютеры, которые могли быстро выполнять математические операции над числами. Тогда-то и появилась принципиально новая концепция: вместо того, чтобы считать сигнал непрерывной функцией, мы представляем его в виде *последовательности чисел*, а обработка такого сигнала становится набором математических операций, выполняемых над этими числами с помощью какого-либо вычислительного устройства. Так родилась *цифровая обработка сигналов*, при которой нам уже не нужно как-то приспосабливаться к физическим свойствам электронных приборов – мы просто берем последовательность чисел и делаем с ней то, что хотим.

Исходно компьютеры были большие и по сегодняшним меркам медленные, поэтому цифровая обработка сигналов воспринималась как довольно экзотическая область радиоэлектроники, практическая ценность которой была далеко не очевидной. Однако за прошедшие десятилетия благодаря успехам микроэлектроники системы цифровой обработки сигналов не только воплотились в реальность, но и вошли в нашу повседневную жизнь, радикально изменив то, как мы слушаем музыку, смотрим фильмы, разговариваем по телефону или ориентируемся на местности.

Цифровая обработка сигналов – это область науки и техники, в которой изучаются общие для разных дисциплин алгоритмы и средства обработки сигналов на основе математических методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Цифровая обработка сигналов – это технология, охватывающая огромный набор приложений, включая коммуникацию, космические исследования, медицину, археологию и развлечения и многое другое. Сложнейшие алгоритмы обработки сигналов и соответствующее аппаратное оборудование распространены в широком диапазоне систем: от узкоспециализированных военных и промышленных до недорогой широко распространенной бытовой электроники. Поскольку системы связи все менее становятся зависимыми от проводов и более мобильными и многофункциональными, значение сложной цифровой обработки сигналов в таких системах продолжает расти. Роль цифровой обработки сигналов в обществе становится все более заметной благодаря сближению средств коммуникации, компьютеров и обработки сигналов, как в потребительской сфере, так и в доле грандиозных индустриальных и правительственных проектов.


Основные разделы ЦОС
Дискретное преобразование Фурье
Теория дискретных линейных систем
Вычислительная математика
Wavelet - анализ
Цифровая фильтрация
Спектральный анализ
Статистический анализ
Оценка параметров сигналов
Синтез фильтров
Разработка алгоритмов
Предварительный анализ данных
Реализация фильтров
Реализация алгоритмов
Корреляционный анализ
Выделение и обнаружение сигналов
ПРИЛОЖЕНИЯ:
- обработка изображений
- телекоммуникации
- исследование речи
- радио/гидролокация
- медицина
- системы реального времени
- навигация
- мультимедиа
- системы управления и контроля
- мобильная телефония
- запись и воспроизведение звуковых и видео данных
- музыкальные инструменты

До 1960-х годов технология обработки сигналов была почти исключительно непрерывной, аналоговой.

Основное отличие ЦОС от классической теории состоит в том, что **сигнал в ЦОС – это числовая последовательность.** Обработка осуществляется с помощью операций над числами. Имеется много примеров, когда обрабатываемые сигналы являются последовательностями. В современных приложениях используют дискретные технологии для обработки непрерывных сигналов. В этом случае **непрерывные сигналы преобразуются в последовательность отсчётов, т. е. дискретный сигнал**. После дискретной обработки её результат вновь конвертируется в непрерывный сигнал. Для многих систем предпочтительны операции в режиме реального времени, т.е. такие операции, при которых отсчёты реакции системы вычисляются с той же частотой, что и отсчёты дискретизации непрерывного сигнала.

Дискретная обработка непрерывных сигналов в режиме реального времени – типичная ситуация в системах связи, радиолокации, гидролокации (сонарах), аудио- и видеосистемах, кодировании и усилении, биомедицине и других многочисленных областях применения. Проигрыватель компакт-дисков (CD–плеер) – иной пример, где входной обработанный сигнал хранится на компакт-диске, а выходной сигнал выдается в реальном времени.

Большинство из традиционных систем обработки оперирует поданным на вход сигналом и получает другой выходной сигнал. Другой важный класс задач обработки сигналов касается интерпретации сигналов. Цель такой задачи состоит не в получении выходного сигнала, а в описании характеристик входного.

ПРЕИМУЩЕСТВА И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЦОС

Главные преимущества ЦОС в сравнении с аналоговой обработкой:

1. Стабильность характеристик. В аналоговой аппаратуре применяют специальные меры для поддержания постоянства тех или иных технических характеристик системы. Требование стабильности характеристик должно учитывать влияние изменения атмосферного давления, температуры, химических примесей, ударов, вибраций, старения, изменения питающих напряжений, условий распространения радиоволн и многое другое. В этом случае для поддержания стабильности используют специальные материалы со стабильными свойствами, с малыми коэффициентами линейного расширения, высокоточные пассивные радиоэлементы. Например, для достижения заданной стабильности частоты генерирования колебаний применяются:

- специальная схемотехника;
- термокомпенсация;
- термостабилизация.

Технология производства аналоговых устройств, как правило, использует специальные покрытия, поглотители влаги, амортизаторы, заливку специальными составами и прочее.

ПРЕИМУЩЕСТВА И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЦОС

2. Принципиально достижимая **более высокая** прогнозируемая и гарантированная **точность обработки сигналов.** Возможность реализации сложных алгоритмов обработки сигналов, которые трудно, а часто даже невозможно реализовать с помощью аналоговой техники.

3. Большой динамический диапазон обрабатываемых сигналов.

4. Возможность гибкой оперативной перестройки структуры и параметров устройств и систем. Возможность реализации принципа «адаптации» или самонастройки, то есть изменения алгоритма обработки сигналов без физической перестройки устройства (например, зависимости от вида сигнала, поступающего на вход фильтра). Техническая реализация ЦОС сравнительно просто осуществляется как на основе аппаратных, так и программных средств.

5. Высокая надёжность, малые вес и габариты.

6. Технически просто обеспечивается **ремонтопригодность и взаимозаменяемость** отдельных устройств или систем.

ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ ЦОС

7. Цифровые методы **особенно эффективны для обработки низкочастотных сигналов**, так как размеры пассивных элементов на низких частотах чрезмерно громоздки. Отдельные блоки многоканальных систем, например АЛУ, можно сделать общими для всех каналов. Широкое применение находит ЦОС в системах с оптимальной обработки сигналов. Например, при использовании низкоскоростного помехоустойчивого кодирования длительное накопление слабых сигналов легко реализуется с помощью методов ЦОС. Алгоритмы ЦОС позволяют уменьшить энергетические, временные и частотные «затраты» на передачу цифровых сигналов (по сравнению с передачей аналоговых сигналов). Возможность одновременной обработки нескольких сигналов.

К недостаткам цифровых процессоров можно отнести:

1. Большую сложность по сравнению с аналоговыми устройствами и пока еще более высокую стоимость.
2. Не столь высокое, как хотелось бы, быстродействие.
3. Невозможность устранения специфических погрешностей, вызванных дискретизацией, квантованием сигнала и округлениями в процессе вычислений.

Сегодняшний специалист стоит перед выбором надлежащей комбинации аналоговых и цифровых методов для решения задачи обработки сигналов. Невозможно обработать физические аналоговые сигналы, используя только цифровые методы, так как все датчики (микрофоны, термопары, тензорезисторы, пьезоэлектрические кристаллы, головки накопителя на магнитных дисках и т.д.) являются аналоговыми устройствами. Поэтому, некоторые виды сигналов требуют наличия цепей нормализации для дальнейшей обработки сигналов аналоговым или цифровым методом.

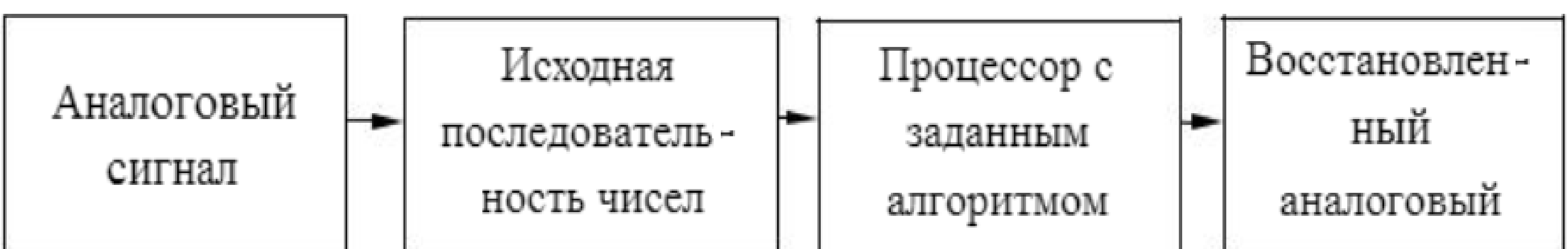
В действительности, **цепи нормализации сигнала** – это аналоговые процессоры, выполняющие:

- усиление сигналов в измерительных и предварительных (буферных) усилителях;
- обнаружение сигнала на фоне шума высокоточными усилителями синфазного сигнала;
- динамическое сжатие диапазона (логарифмическими усилителями, логарифмическими ЦАП и усилителями с программируемым коэффициентом усиления);
- фильтрацию (пассивную и активную).

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ЦОС

Цифровая обработка сигналов связана с представлением сигнала в виде последовательности чисел. Это означает, что исходный аналоговый сигнал преобразуется в исходную последовательность чисел, которая процессором (вычислителем) по заданному алгоритму преобразуется в другую последовательность чисел, однозначно соответствующую исходной. Далее из полученной новой последовательности формируется результирующий сигнал.

Последовательность операций ЦОС можно представить следующим рисунком.



ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ЦОС

Префильтрация обеспечивает удаление определённых спектральных составляющих лежащих выше некоторого значения. Префильтрация осуществляется аналоговым фильтром низких частот (ФНЧ), получившим название антиэлайсингового, поскольку он предотвращает искажения спектра типа наложения (alising), которые возникают в спектре цифрового сигнала при недостаточной частоте дискретизации. Во временной области эффект наложения означает невозможность точного восстановления аналогового сигнала по его отсчётам. Антиэлайсинговый фильтр формирует аналоговый сигнал с подавленными верхними спектральными составляющими в полосе задержания, начиная с частоты ω. Это даёт основание считать сигнал практически ограниченным по частоте и неподверженным эффекту наложения при частоте дискретизации не менее 2ω.

Постфильтрация обеспечивает интерполяцию восстанавливаемого сигнала. В качестве постфильтра можно использовать аналоговый сглаживающий фильтр нижних частот.

Кодер может включать в себя устройства, устраняющие избыточность информационного сигнала для реализации сжатия. В простейшем случае в качестве кодера может быть использован АЦП. В качестве декодера – ЦАП.

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

Способы отсчёта значений сигнала

Математические сигналы – это функции одной или более независимых переменных. Например, речевой сигнал представляется как функция времени, а изображение (фотография) – функция яркости от двух пространственных переменных. Независимая переменная может быть как непрерывной, так и дискретной. Поскольку реальные физические процессы протекают во времени, то в качестве математической модели сигнала, представляющего эти процессы, используют функции времени, отражающие изменения физических процессов.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

По роли в передачи конкретной информации сигналы могут быть разделены на **полезные** и **мешающие (помехи)**. Полезные сигналы переносят заданную информацию, а помехи искажают её, хотя, может быть, и переносят другую информацию.

По степени определенности ожидаемых значений сигнала все сигналы можно разделить на **детерминированные** сигналы и **случайные** сигналы. Случайным сигналом называют функцию времени, значения которой заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. В качестве основных характеристик случайных сигналов принимают:

а) закон распределения вероятности (относительное время пребывания велгчины сигнала в определенном интервале);

б) спектральное распределение мощности сигнала.

Детерминированным называется сигнал, значение которого в любой момент времени может быть точно определено.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Детерминированные сигналы могут быть периодическими и **непериодическими**.

Среди детерминированных сигналов особое место занимают **испытательные сигналы**, необходимость в существовании которых обусловлена потребностями испытания характеристик разрабатываемых электронных устройств. Самым распространенным испытательным сигналом является гармоническое колебание, которое используется, например, в измерительной практике для оценки частотных свойств устройств различного назначения.

<u>По способу отсчёта значений</u> сигнала во времени сигналы делятся на:

- непрерывные;
- дискретные;
- цифровые.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Непрерывный сигнал описывается непрерывной функцией x(t), задаётся на непрерывных промежутках, и обычно называется аналоговым. Аналоговый сигнал может быть действительным или комплексным. Интервал изменения переменной времени может быть конечным или бесконечным. Для непрерывного (континуального) это несчётное множество. Например, [0,t) или [0,∞). Выходные сигналы датчиков являются отражением некоторых физических процессов. Они, как правило, непрерывны, поскольку большинство физических процессов непрерывны по своей природе. Аналоговые сигналы достаточно просто генерировать и обрабатывать, однако они позволяют решать относительно простые технические задачи. Работа современных информационных систем основана на использовании дискретных и цифровых сигналов.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

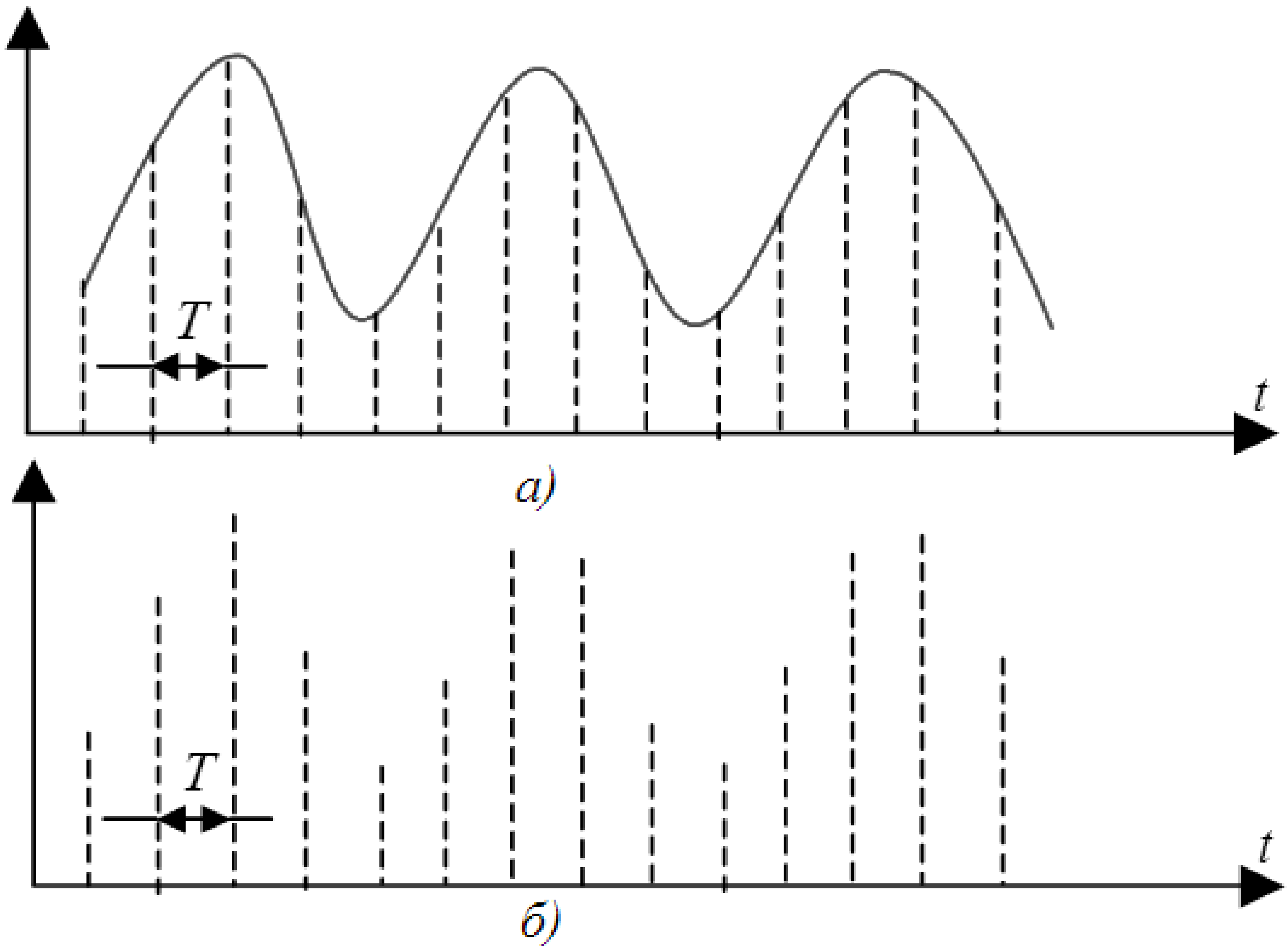


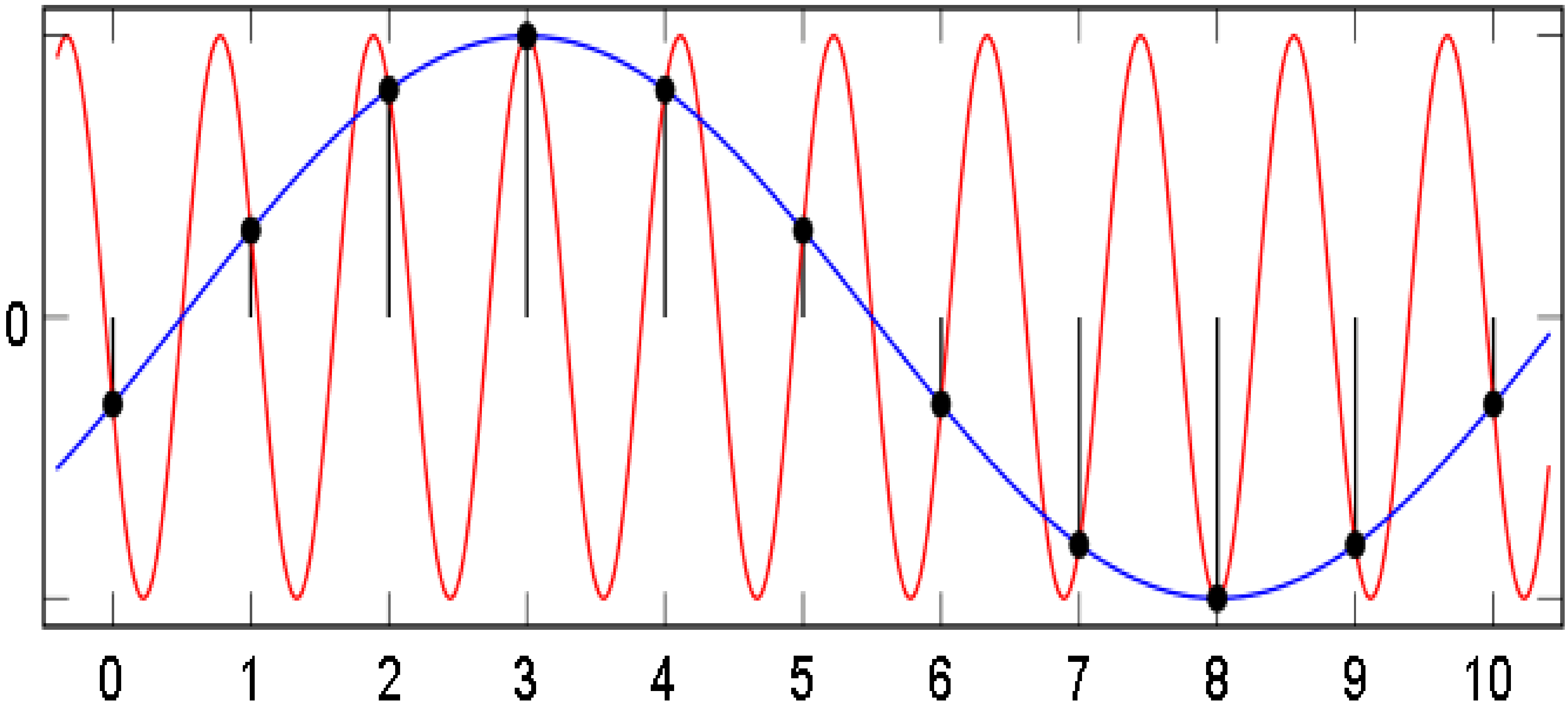
**Рис.1. Дискретизация непрерывного сигнала;
а) исходный сигнал; б) сигнал после дискретизации.**

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Для того чтобы восстановить исходный непрерывный сигнал из дискретизированного с малыми искажениями (погрешностями), необходимо рационально выбрать шаг дискретизации. Поэтому при преобразовании аналогового сигнала в дискретный обязательно возникает вопрос о величине шага дискретизации Δt.

Совершенно очевидно, что точность восстановления аналогового сигнала по последовательности его отсчетов зависит от величины интервала дискретизации Δt. Чем он короче, тем меньше будет отличаться функция u(t) от плавной кривой, проходящей через точки отсчетов. Однако с уменьшением интервала дискретизации Δt существенно возрастает сложность и объем обрабатывающей аппаратуры. При достаточно большом интервале дискретизации Δt возрастает вероятность искажения или потери информации при восстановлении аналогового сигнала.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ



Появление ложного сигнала низкой частоты при недостаточно высокой частоте дискретизации

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Оптимальная величина интервала дискретизации устанавливается теоремой Котельникова. **Теоре́ма Коте́льникова** (в англоязычной литературе — теорема Найквиста — Шеннона или теорема отсчётов) гласит, что, если аналоговый сигнал имеет конечный (ограниченный по ширине частотой F_M) спектр, то он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим отсчётам, взятым с частотой, строго большей удвоенной верхней частоты : $f_\partial \geq 2F_M$. Другими словами, произвольный сигнал u(t), спектр которого ограничен некоторой частотой F_M, может быть полностью восстановлен по последовательности своих отсчетных значений, следующих с интервалом времени $\Delta t \leq \dfrac{1}{2F_M}$.

Такая трактовка рассматривает идеальный случай, когда сигнал начался бесконечно давно и никогда не закончится, а также не имеет во временно́й характеристике точек разрыва. Именно это подразумевает понятие «спектр, ограниченный частотой».

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Реальные сигналы (например, звук на цифровом носителе) не обладают такими свойствами, так как они конечны по времени и обычно имеют разрывы во временной характеристике. Соответственно, их спектр бесконечен. В таком случае полное восстановление сигнала невозможно и из теоремы Котельникова вытекают два следствия:

- Любой аналоговый сигнал может быть восстановлен с какой угодно точностью по своим дискретным отсчётам, взятым с частотой $f_д \geq 2F_M$, где F_M — максимальная частота, которой ограничен спектр реального сигнала.
- Если максимальная частота в сигнале превышает половину частоты дискретизации, то способа восстановить сигнал из дискретного в аналоговый без искажений не существует.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Дискретным называется сигнал, дискретный во времени и непрерывный по состоянию. Он задаётся решетчатой функцией (nT) дискретной переменной n. Величина (nT) – отсчёт сигнала в точке n, указывающей порядковый номер отсчёта. Для дискретного и цифрового сигналов это счётное множество, включающее N точек – интервал [0, N-1]. **Интервал T** называется **периодом дискретизации**, а обратная величина $f_\partial = 1/T$ – **частотой дискретизации**. Дискретный сигнал может быть действительным или комплексным. Его характеристиками являются **энергия** и **мощность**:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2, \quad P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2,$$

которые могут интерпретироваться как энергия и мощность ступенчатых огибающих дискретных сигналов (их континуальных аналогов).

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Дискретные сигналы ортогональны, если их взаимная энергия удовлетворяет условию:

$$E_{12}=\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2{}^*(n)=0,$$

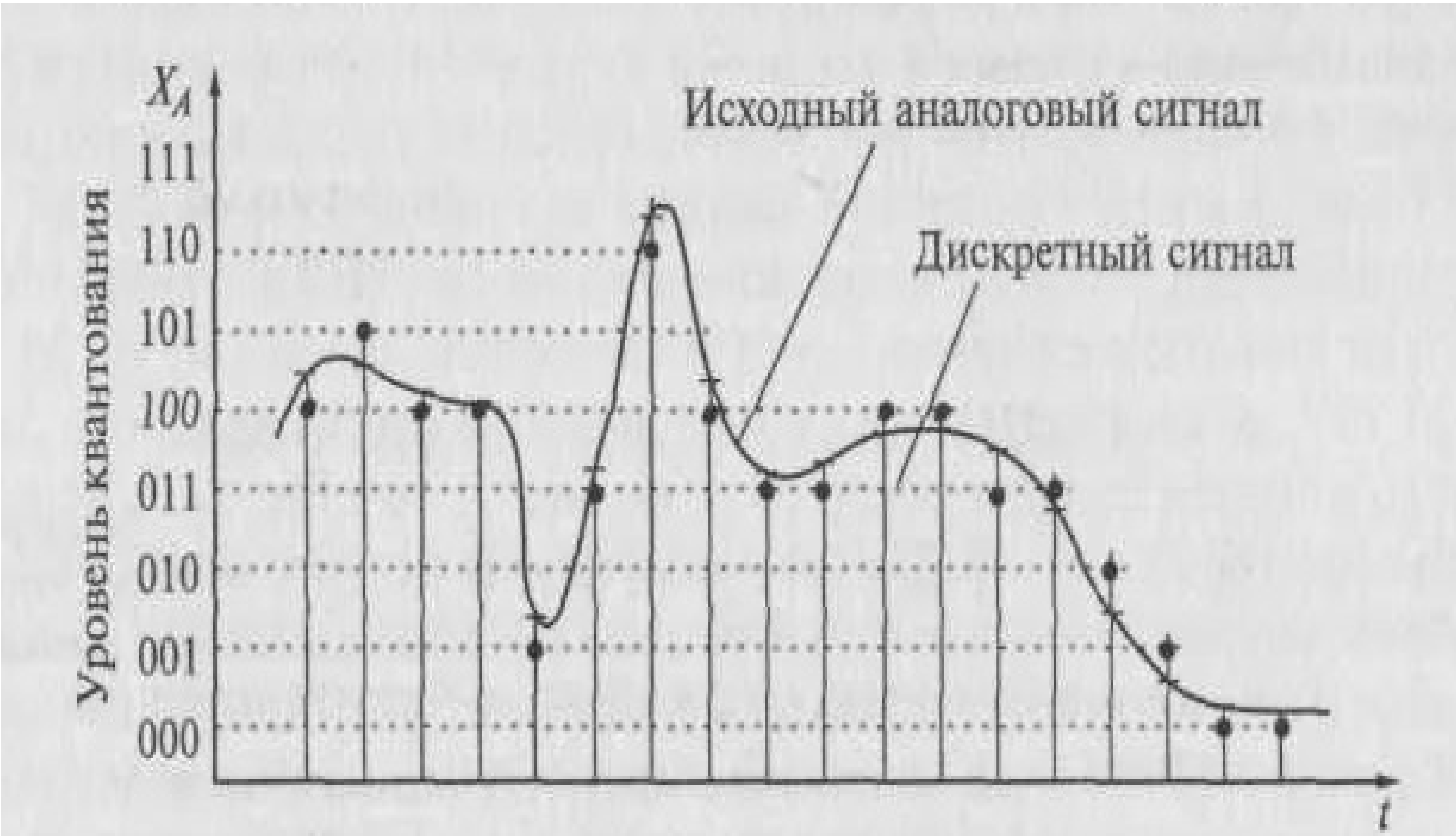
где знак * обозначает комплексное сопряжение.

Энергия и мощность ортогональных сигналов аддитивны,так как

$$E=\sum_{n=0}^{N-1} \left|x_1(n)+x_2(n)\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1} \left|x_1(n)\right|^2+\sum_{n=0}^{N-1} \left|x_2(n)\right|^2.$$

Цифровая обработка сигналов требует, чтобы дискретные сигналы были квантованы по величине, чтобы их амплитуда принимала только целочисленные фиксированные значения. В этом случае дискретные сигналы называются **цифровыми**. Цифровой сигнал дискретен как во времени, так и по состоянию.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ



КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

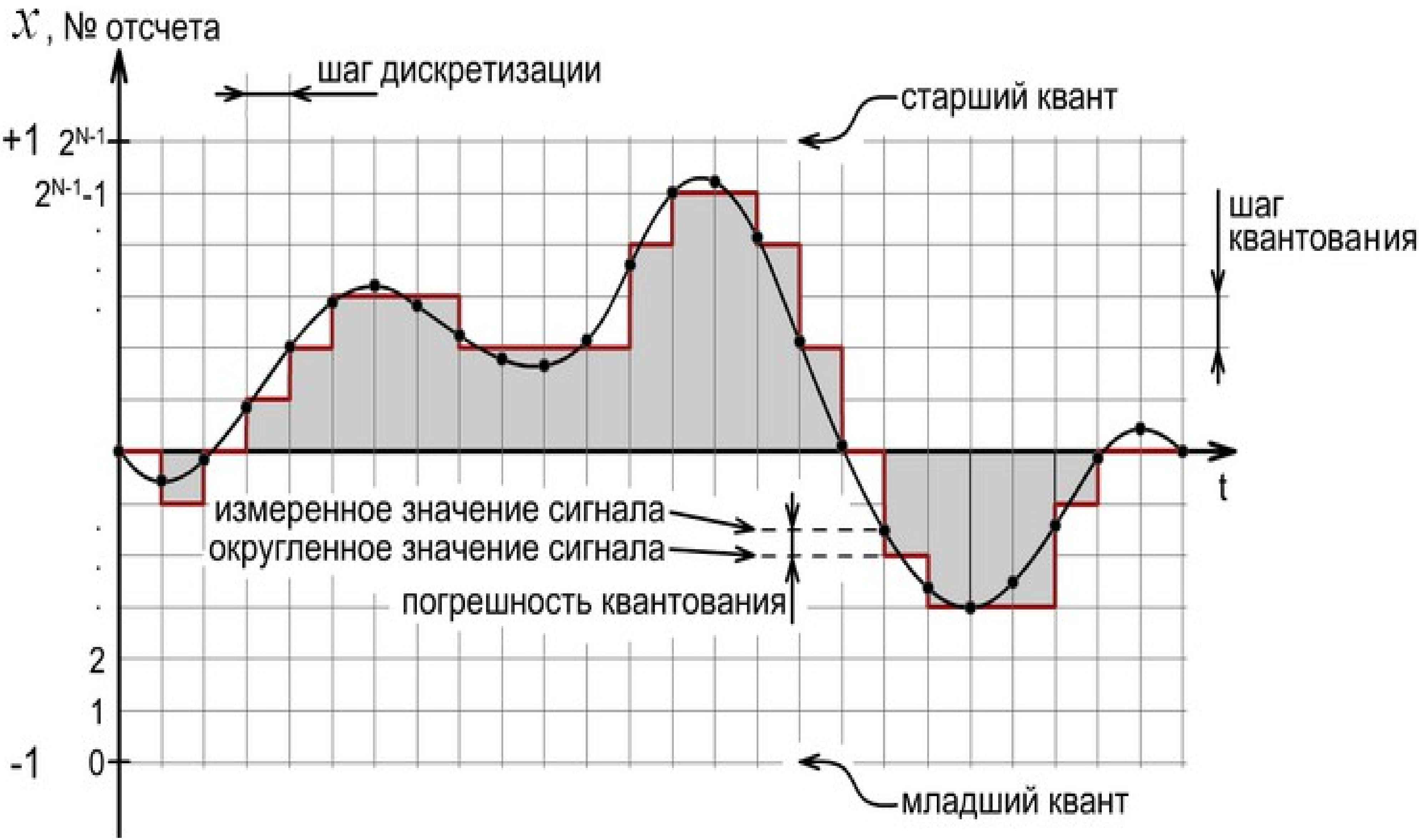
Цифровой сигнал также описывается решетчатой функцией x(nT), которая принимает конечное число значений на некотором интервале (nT). Эти значения называются уровнями квантования, а соответствующая функция – **квантованным сигналом**. Квантование производится с целью получения конечной последовательности чисел. При попадании отсчёта сигнала в пределы того или иного шага квантования производится его округление до уровня квантования, соответствующего этому шагу.

Цифровой сигнал отличается от дискретного на величину:

$\zeta_0(nT)=x_d(nT)-x(nT)$, где $\zeta_0(nT)$ – ошибка квантования.

Максимальной ошибкой квантования может быть половина шага квантования.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ



КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

На выходе АЦП формируется последовательность двоичных чисел {x}, соответствующая значениям $x_d(nT)$, т. е. x(nT) = {000 001 010 010 011 011 011}. В результате получается цифровой образ сигнала, который называется **волновой формой** (Waveform). Другое название оцифрованного сигнала – **сэмпл** (Sampl). Соответственно, процесс цифрового преобразования называется **сэмплированием**. Волновые формы (сэмплы) могут храниться в памяти, на жестком диске в файлах различных форматов.

Точность цифрового преобразования определяют динамический диапазон сигнала и соотношение сигнал–шум. Показатель динамического диапазона зависит от длины используемого двоичного кода или битового разрешения (Bit Resolution) шума квантования. С увеличением уровней квантования повышается амплитудное разрешение сигнала, точность его воспроизведения.

ПРИМЕРЫ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Дискретизация аналоговых сигналов – не единственный источник получения сигналов дискретных. Примером дискретных сигналов другого происхождения являются различные финансовые показатели. Например, на рис. показана таблица курса доллара США, ежедневно устанавливаемого Центральным банком Российской Федерации. Последовательность этих значений также образует сигнал дискретного времени.

Обработка финансовых данных – важный раздел современной обработки сигналов. К нему относятся алгоритмы предсказания биржевых курсов, на принципах обработки сигналов основаны так называемые биржевые роботы, осуществляющие игру на бирже без непосредственного участия оператора. Процесс выплаты кредита также можно описать как изменение значений дискретного сигнала во времени.

ПРИМЕРЫ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Курс доллара ЦБ РФ в феврале 2020

Валюта: доллар на 2020-02

КУРСЫ ЦБ РФ АРХИВ ЦБ РФ КУРС ДОЛЛАРА КУРС ЕВРО НА 2020 ГОД НА ФЕВРАЛЬ 2020 КУРСЫ ВАЛЮТ В БАНКАХ

День	Курс за 1 доллар ЦБ РФ	Изменение
14 февраля 2020	63.6016 Курс за 14 февраля 2020	+0.55
13 февраля 2020	63.047 Курс за 13 февраля 2020	-0.9
12 февраля 2020	63.949 Курс за 12 февраля 2020	+0.18
11 февраля 2020	63.7708 Курс за 11 февраля 2020	+0.3
10 февраля 2020	63.472 Курс за 10 февраля 2020	
9 февраля 2020	63.472 Курс за 9 февраля 2020	
8 февраля 2020	63.472 Курс за 8 февраля 2020	+0.67
7 февраля 2020	62.7977 Курс за 7 февраля 2020	-0.38

ПРИМЕРЫ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Следующий пример относится к обработке изображений. Изображение представляет собой *двумерный* сигнал, это зависимость интенсивности света от двух пространственных координат. В случае регистрации изображения современными цифровыми фотоаппаратами или видеокамерами полученный сигнал сразу же оказывается дискретным так как фотоприемник представляет собой двумерную матрицу, состоящую из отдельных пикселей. Каждый пиксель регистрирует интенсивность падающего на него света, эта интенсивность преобразуется в электрический сигнал и затем в цифровой код. Таким образом, получается дискретный (в данном случае по пространству, а не по времени) сигнал.

В качестве иллюстрации на рис. показано, как фотография (справа сверху) представляется в виде двумерной функции зависимости интенсивности черно-белого изображения от пространственных координат – номеров строк и столбцов пикселей.

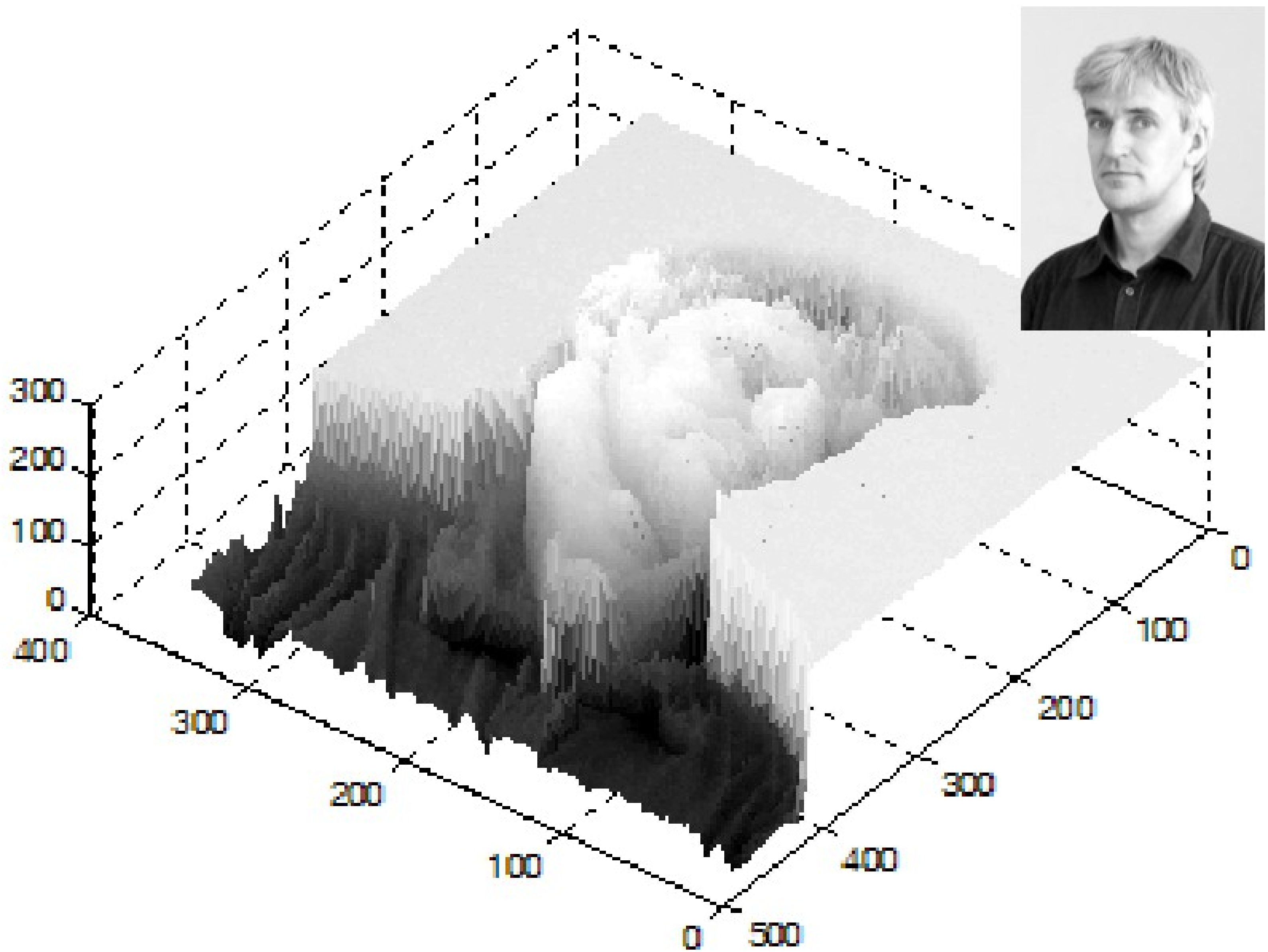


Рис. Изображение как двумерный дискретный сигнал

ПРИМЕРЫ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Приведенными примерами возможности получения дискретных сигналов, разумеется, не ограничиваются. Упомянем лишь еще одну область. Это так называемая биоинформатика, а более конкретно – анализ генетического кода. Генетический код представляет собой последовательность нуклеотидов и, поскольку эта цепочка состоит из отдельных элементов, ее можно представить как сигнал дискретного времени, кроме того, количество возможных используемых в нем нуклеотидов конечно, поэтому данный сигнал является не только дискретным, но и цифровым – его значения могут принимать всего лишь несколько возможных вариантов. Обработка этой генетической информации – тоже одна из интереснейших областей современной цифровой обработки сигналов.

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

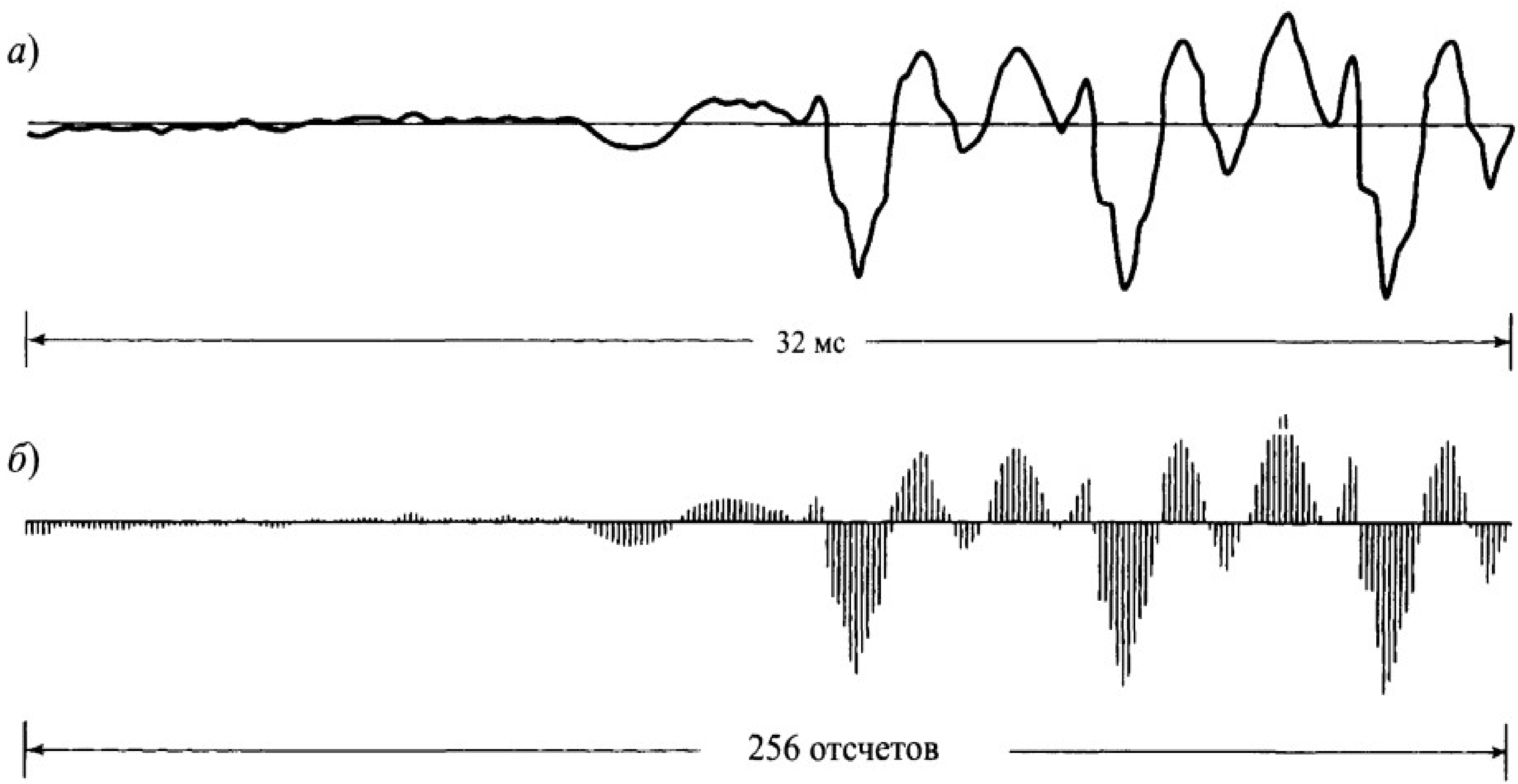


Рис. 2. *а*) фрагмент непрерывного речевого сигнала; *б*) последовательность отсчетов, полученная из фрагмента *а*), при шаге $T = 125$ мкс

НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ

При изучении цифровых систем удобно пользоваться нормированным временем

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n.$$

Нормированное время $\hat{t}$ есть номер n отсчёта дискретного или цифрового сигнала. Для описания дискретного (цифрового) сигнала могут быть использованы равнозначные обозначения:

$$x(nT),\ N_1 \le n \le N_2; \quad (1)$$

$$x(n),\ N_1 \le n \le N_2; \quad (2)$$

Обозначение (1) применяется при равномерном расположении отсчётов;

обозначение (2) может применяться при неравномерном расположении отсчётов.

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

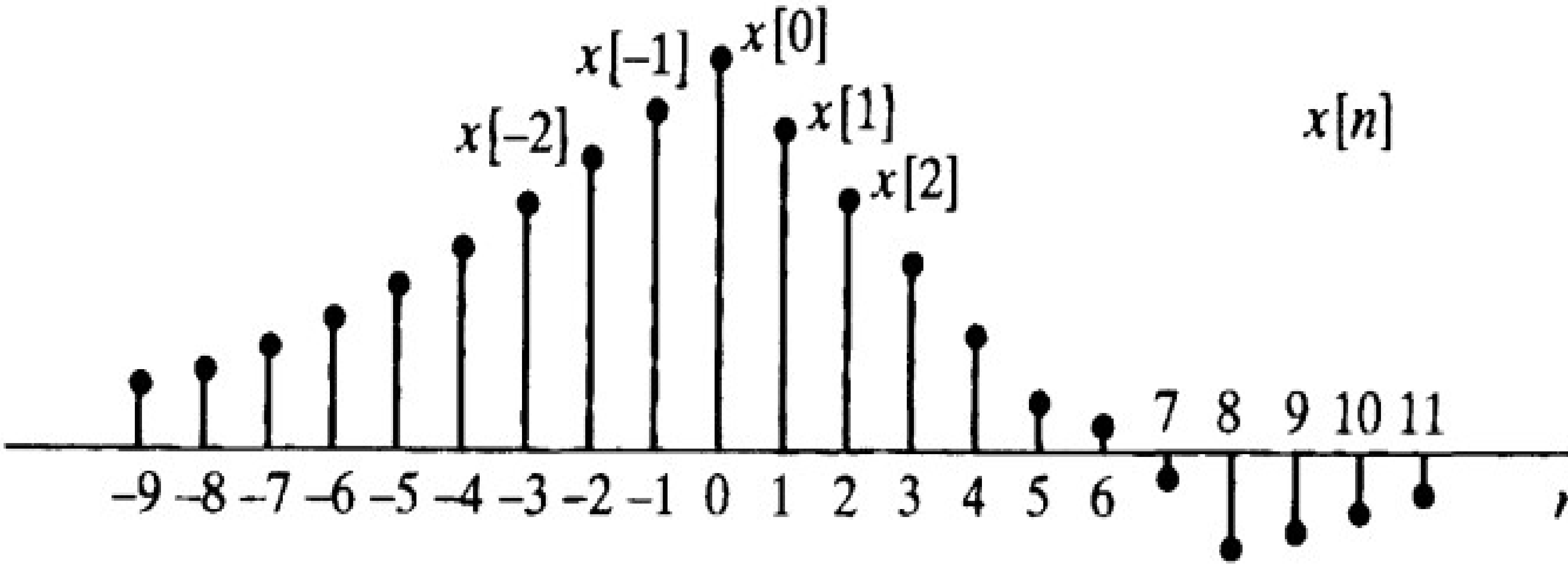


Рис. 1. Графическое представление дискретного сигнала

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Основная цель анализа – предоставить математические механизмы для сравнения разных сигналов, выявления их сходства и различия. Основные составляющие анализа сигналов:

- измерение числовых параметров сигналов (максимальное значение, энергия, мощность и т. п.);
- разложение сигналов на элементарные составляющие;
- измерение «степени схожести» сигналов.

Норма и энергия сигнала. Первая группа параметров связана с измерением «размера» (уровня) сигнала. Для этого вводится понятие *нормы* сигнала. Можно трактовать последовательности чисел (то есть дискретные сигналы) как векторы в многомерном пространстве сигналов.

Основные свойства нормы сигнала, характеризующей его «размер»:

- норма должна быть неотрицательной;
- она должна быть равна нулю только для сигнала, все отсчеты которого равны нулю;
- при умножении всех отсчетов сигнала на одну и ту же константу норма должна пропорционально измениться, умножившись на модуль этой константы.

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Норма и энергия сигнала

Общая формула для так называемой *p*-нормы сигнала имеет вид:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p}$$

Наибольшее распространение получила *евклидова норма*, которая соответствует $p = 2$:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2}$$

Квадрат евклидовой нормы, то есть сумма квадратов модулей отсчетов сигнала, называется его *энергией*:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2$$

Важный класс сигналов образуют *сигналы с конечной энергией*, для которых $E_x < \infty$.

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Мощность сигнала. Даже если энергия сигнала является бесконечной, возможно, для него удастся рассчитать энергетические характеристики, использовав понятие *мощности*.

Мгновенная мощность для дискретного сигнала определяется просто как квадрат модуля его отсчетов:

$$p(k) = |x(k)|^2$$

Средняя мощность получается путем усреднения мгновенной мощности по заданному интервалу времени. Для конечного интервала

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{k=k_1}^{k_2} \left| x(k) \right|^2 ,$$

а для усреднения по бесконечной временной оси необходимо выполнить предельный переход:

$$P_{\text{ср}} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \left| x(k) \right|^2$$

Даже если у сигнала была бесконечная энергия, может оказаться, что у него будет конечная средняя мощность. *Сигналы с конечной средней мощностью*, у которых $P_{\text{ср}} < \infty$, образуют еще один важный класс сигналов.

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Расстояние между сигналами. Одним из способов измерить степень сходства между сигналами является введение понятия *расстояния* между ними. Расстояние равно *норме разности* сигналов. В случае евклидовой нормы получается *евклидово расстояние*, рассчитываемое по формуле

$$d_{12} = \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|_2 = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x_1(k) - x_2(k) \right|^2} .$$

Рассмотрим подробнее, что представляет собой квадрат евклидова расстояния:

$$\begin{aligned} d_{xy}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x(k) - y(k) \right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x(k) \right|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| y(k) \right|^2 - \\ &- \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y^*(k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k) y(k) = E_x + E_y - 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y^*(k). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Входящая в полученную формулу сумма

$$\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y^*(k) \tag{1.2}$$

в терминологии обработки сигналов называется *взаимной корреляцией* двух сигналов, а в терминологии пространства сигналов – *скалярным произведением* векторов, представляющих сигналы.

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Корреляционные функции. Мы получили, что евклидово расстояние между сигналами зависит от их энергий и взаимной корреляции. Энергии зависят от индивидуальных уровней сигналов, а взаимная корреляция показывает сходство их *формы*. Но сигналы одинаковой формы могут отличаться друг от друга просто временным сдвигом. Чтобы учесть это, понятие взаимной корреляции расширяется и вводится *взаимная корреляционная функция* (ВКФ), которая показывает взаимную корреляцию между сигналами при разных временных сдвигах. Аргументом этой функции является временной сдвиг Δk:

$$B_{xy}(\Delta k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y^{*}(k - \Delta k).$$

Чем больше модуль ВКФ, тем больше сходство формы сигналов при соответствующем временном сдвиге. Значения модуля ВКФ ограничены, эта граница определяется неравенством, которое в разных вариантах формулировки известно под именами Коши, Буняковского и Шварца:

$$\left| B_{xy}(\Delta k) \right| \le \sqrt{E_x E_y}.$$

Равенство достигается в том и только том случае, когда один сигнал является задержанной и масштабированной копией другого, то есть если $y(k) = Ax(k - k_0)$.

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Корреляционные функции.

$$B_{xy}(\Delta k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k-\Delta k)$$ – *взаимная корреляционная функция* (ВКФ),

Чем больше модуль ВКФ, тем больше сходство формы сигналов при соответствующем временном сдвиге.

При совпадении сигналов x и y получается *автокорреляционная функция* (АКФ):

$$B_x(\Delta k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x^*(k-\Delta k)$$

Так как сигнал полностью совпадает со своей несдвинутой копией, максимальное значение АКФ достигается при $\Delta k = 0$ и равно энергии сигнала:

$$\left|B_x(\Delta k)\right| \le B_x(0) = E_x .$$

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

Математически дискретные сигналы представляются последовательностями чисел. Числовая последовательность x, n-й член в которой обозначают через $x[n]$, формально записывается как

$$x = \{x[n]\}, \qquad -\infty < n < \infty,$$

где n — целое число. На практике такие последовательности возникают, например, при преобразовании аналогового сигнала в дискретную форму. В этом случае численное значение n-го члена последовательности равно величине аналогового сигнала $x_a(t)$ в момент времени nT, т. е.

$$x[n] = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty.$$

Число T называют *шагом дискретизации*, а обратное к нему — *частотой дискретизации*.

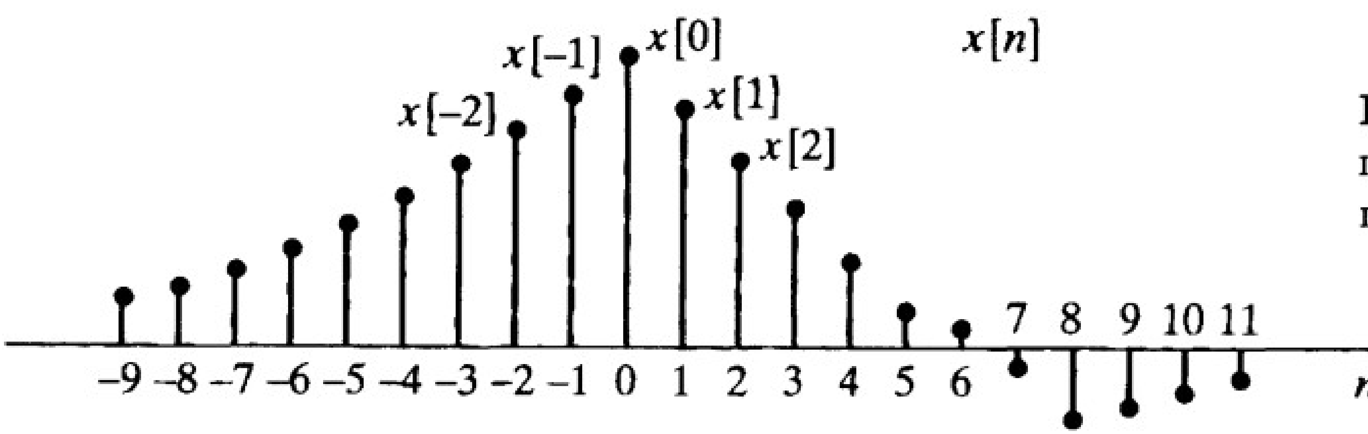


Рис. Графическое представление дискретного сигнала

СТАНДАРТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

При анализе дискретных сигналов и в системах обработки сигналов над последовательностями совершается ряд основных преобразований. Произведение и сумма двух последовательностей $x[n]$ и $y[n]$ определяются почленно, т. е. $z[n] = x[n] \cdot y[n]$ — произведение, а $w[n] = x[n] + y[n]$ — сумма этих последовательностей. Произведением последовательности $x[n]$ на число α считается последовательность, получающаяся из $x[n]$ в результате умножения каждого его члена на α. Последовательность $y[n]$ называют задержанной, или сдвинутой версией последовательности $x[n]$, если

$$y[n] = x[n - n_0], \quad \text{где } n_0 \text{ — целое число.}$$

Некоторые из последовательностей особо важны при обсуждении теории дискретных сигналов и систем.

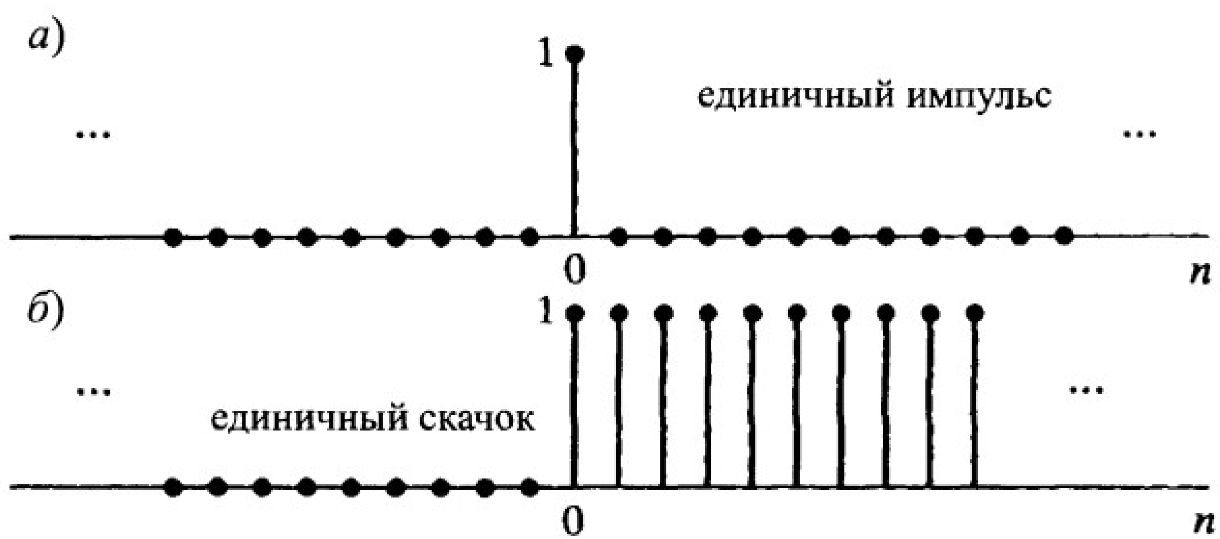


Рис. Некоторые стандартные последовательности

СТАНДАРТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

При анализе дискретных сигналов и в системах обработки сигналов над последовательностями совершается ряд основных преобразований. Произведение и сумма двух последовательностей $x[n]$ и $y[n]$ определяются почленно, т. е. $z[n] = x[n] \cdot y[n]$ — произведение, а $w[n] = x[n] + y[n]$ — сумма этих последовательностей. Произведением последовательности $x[n]$ на число α считается последовательность, получающаяся из $x[n]$ в результате умножения каждого его члена на α. Последовательность $y[n]$ называют задержанной, или сдвинутой версией последовательности $x[n]$, если

$$y[n] = x[n - n_0], \quad \text{где } n_0 \text{ — целое число.}$$

Некоторые из последовательностей особо важны при обсуждении теории дискретных сигналов и систем.

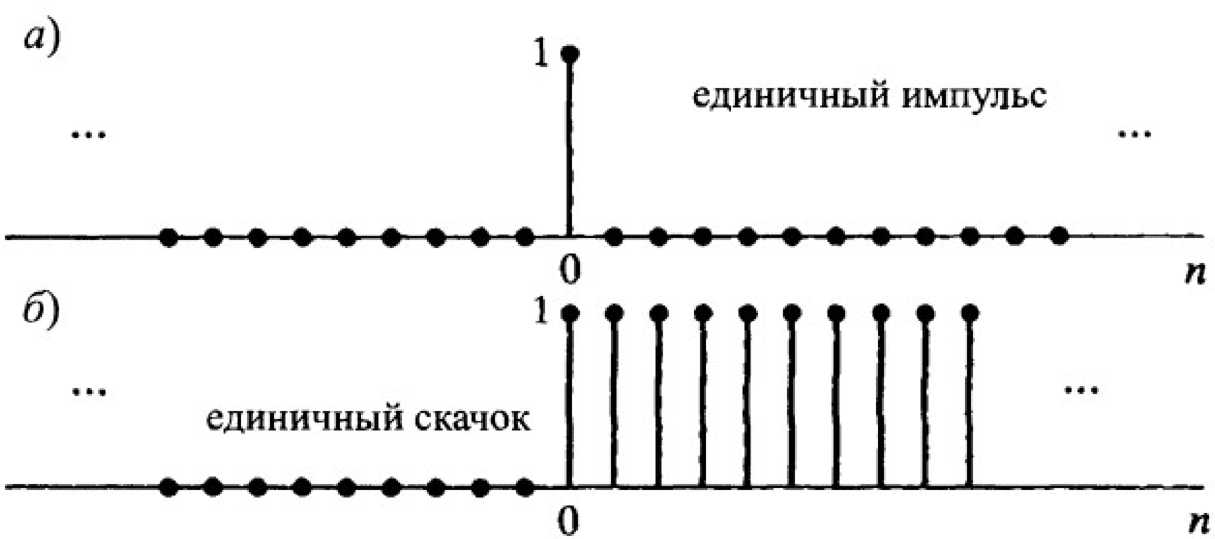


Рис. Некоторые стандартные последовательности

СТАНДАРТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

Некоторые из последовательностей особо важны при обсуждении теории дискретных сигналов и систем.

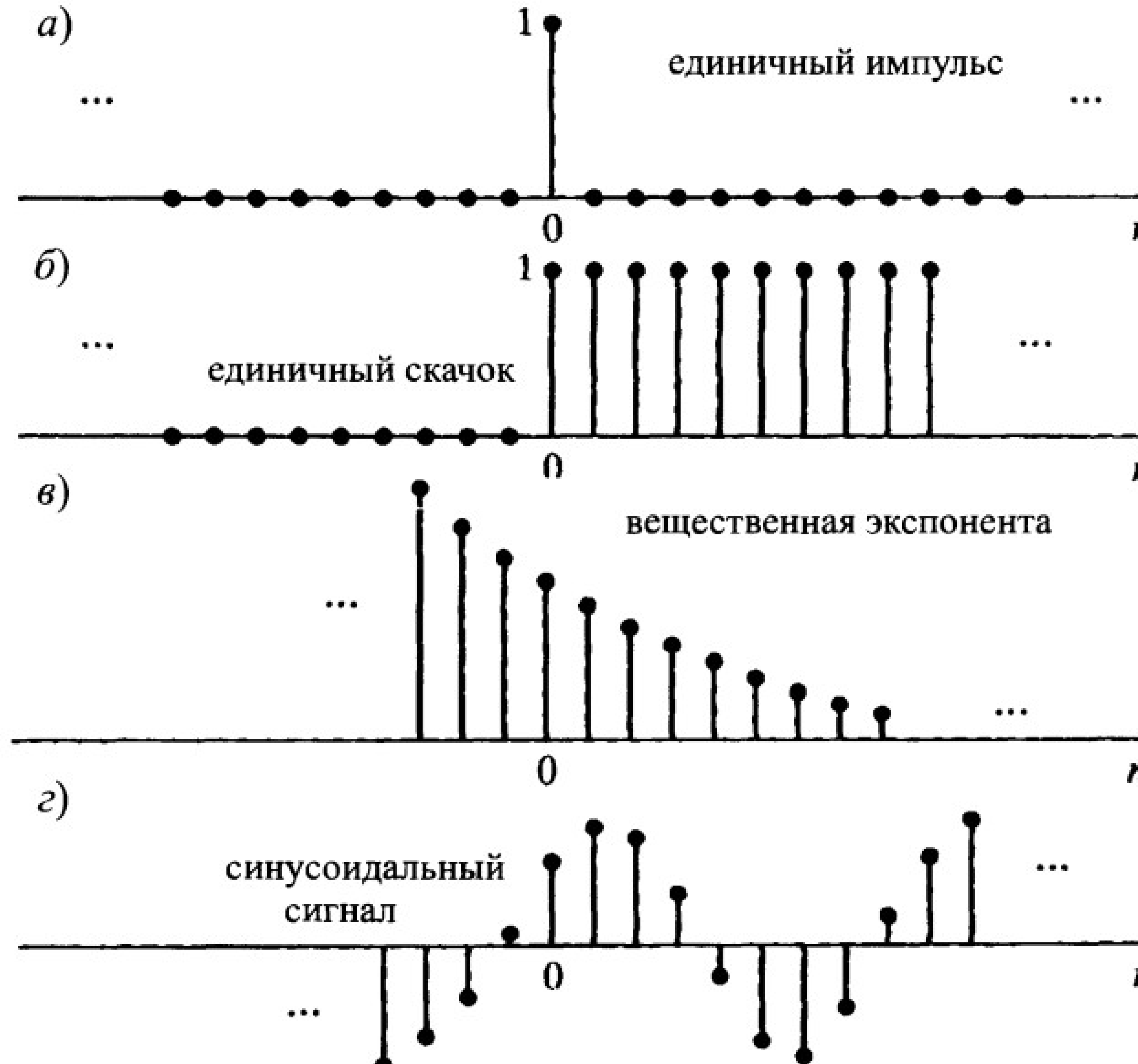
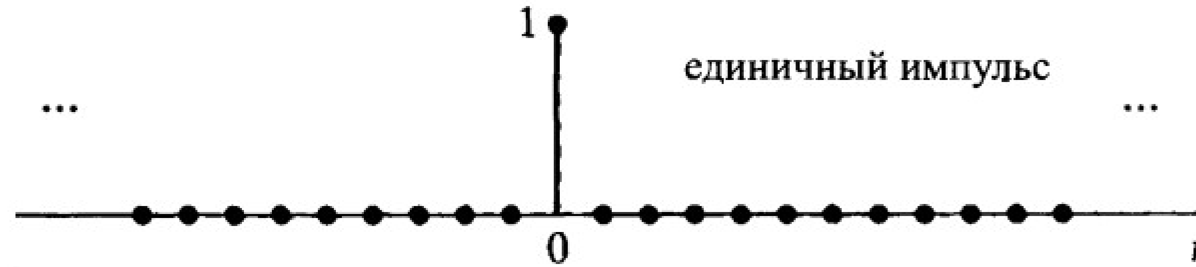


Рис. Некоторые стандартные последовательности

СТАНДАРТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

Единичный импульс

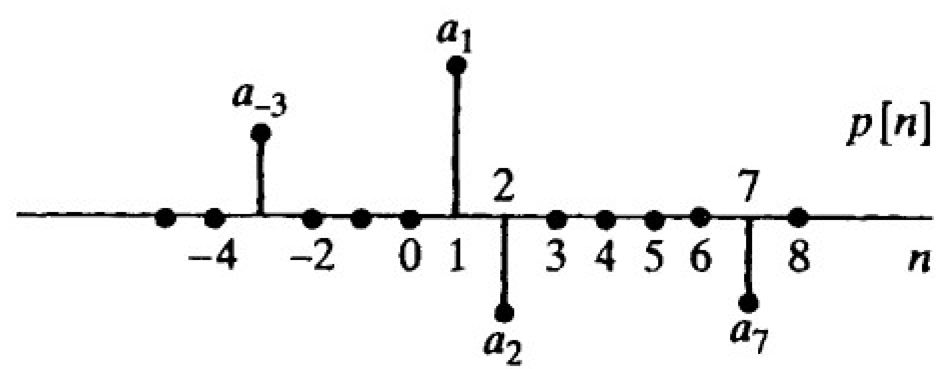
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$



К одному из важных свойств единичного импульса относится тот факт, что любая последовательность может быть выражена в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов. Например, последовательность $p[n]$ из рис. представляется в виде:

$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] +$$

$$+ a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7],$$

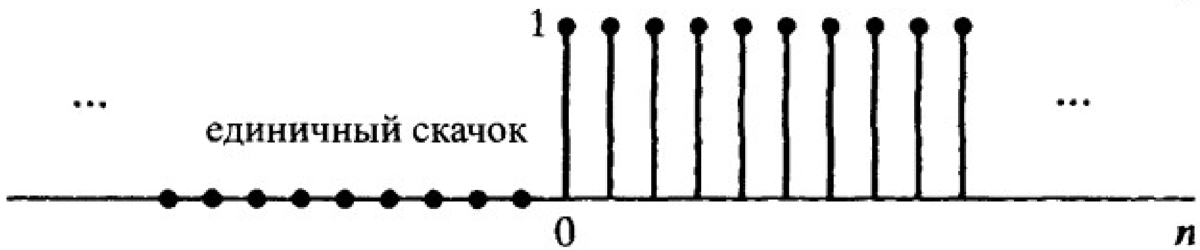


а для произвольной последовательности справедливо соотношение:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

СТАНДАРТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

Единичный скачок определяется формулой: $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$



Единичный скачок выражается через импульс: $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$,

т. е. n-й отсчет единичного скачка равен сумме всех членов импульсной последовательности вплоть до n-го.

Все ненулевые члены единичного скачка равны 1, поэтому

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k].$$

С другой стороны, импульсная последовательность может быть выражена через единичный скачок как разность:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

СТАНДАРТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

Экспоненциальная последовательность наиболее важна при представлении и анализе линейных стационарных дискретных систем. В общем виде такие последовательности записываются как

$$x[n] = A\alpha^n.$$

Если A и α — вещественные числа, то соответствующая последовательность тоже называется вещественной. Если $0 < \alpha < 1$ и A положительно, то значения последовательности положительны и убывают при росте n, как на рис.

Когда $-1 < \alpha < 0$, знаки членов последовательности чередуются, но их абсолютные значения все равно убывают. Наконец, при $|\alpha| > 1$ последовательность возрастает по абсолютной величине с ростом n.

СТАНДАРТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

Комбинирование стандартных последовательностей

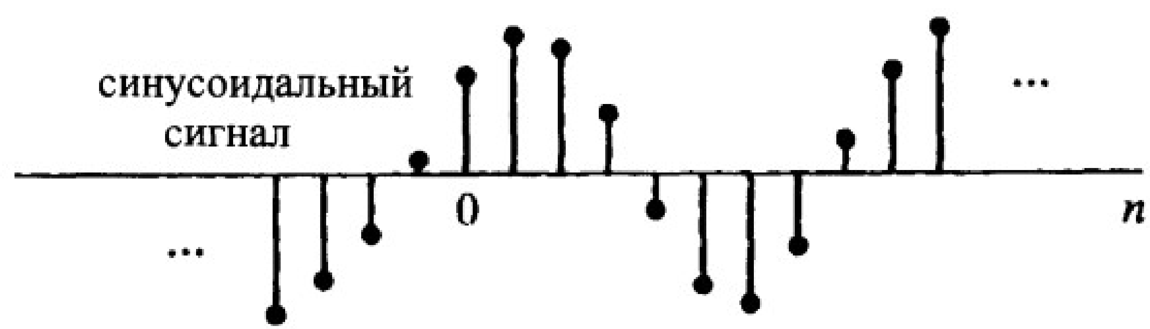
Довольно часто стандартные последовательности комбинируются для получения новых. Экспоненциальную последовательность, члены которой равны нулю при $n < 0$, можно определить как

$$x[n] = \begin{cases} A\alpha^n, & n \geqslant 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

что имеет довольно неуклюжий вид. Более просто такая последовательность задается как выражение $x[n] = A\alpha^n u[n]$.

Синусоидальная последовательность тоже играет не последнюю роль. В общей форме она имеет вид $$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

где A и φ — вещественные константы.



Комбинирование стандартных последовательностей

Экспоненциальная последовательность $A\alpha^n$ с комплексным α имеет вещественную и мнимую части, являющиеся взвешенными синусоидами. Более точно, если $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ и $A = |A|e^{j\varphi}$, то последовательность $A\alpha^n$ может быть записана одним из следующих способов:

$$x[n] = A\alpha^n = |A|e^{j\varphi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\varphi)} =$$
$$= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi).$$

Эта последовательность осциллирует с экспоненциально растущей огибающей, если $|\alpha| > 1$, или с экспоненциально уменьшающейся огибающей при $|\alpha| < 1$.

Когда $|\alpha| = 1$, последовательность называется *комплексной экспоненциальной последовательностью*:

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n+\varphi)} = |A|\cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A|\sin(\omega_0 n + \varphi),$$

т.е. как вещественная, так и мнимая часть последовательности меняется синусоидально в зависимости от n. По аналогии со случаем непрерывного времени величину ω_0 называют (круговой) *частотой* комплексной синусоиды или комплексной экспоненты, а φ — ее *фазой*, n — безразмерное целое число. Поэтому ω_0 должна измеряться в радианах. Если мы хотим прослеживать аналогию со случаем непрерывного времени, то необходимо уточнить единицу частоты как радианы на отсчет, а n измерять в отсчетах.

Комбинирование стандартных последовательностей

Тот факт, что переменная n в формуле всегда принимает только целые значения, подводит нас к некоторым важным отличиям в свойствах дискретных и непрерывных комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей. Разница между непрерывной и дискретной комплексной экспонентой особенно заметна при частоте $(\omega_0 + 2\pi)$. В этом случае

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0+2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}.$$

Более общий факт: можно убедиться, что комплексные экспоненциальные последовательности с частотами $(\omega_0 + 2\pi r)$ при $r \in \mathbb{Z}$ неотличимы одна от другой. Аналогичное утверждение справедливо для синусоидальных последовательностей:

$$x[n] = A\cos\big((\omega_0 + 2\pi r)n + \varphi\big) = A\cos(\omega_0 n + \varphi).$$

При рассмотрении комплексных экспоненциальных сигналов вида $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ или вещественных синусоидальных сигналов типа $x[n] = A\cos(\omega_0 n+\varphi)$ мы должны ограничится частотами, лежащими в интервале длины 2π, например $-\pi < \omega_0 \leqslant \pi$ или $0 \leqslant \omega_0 < 2\pi$.

Комбинирование стандартных последовательностей

Следующее важное отличие дискретных комплексных экспонент и синусоид от непрерывных касается их периодичности. В непрерывном случае как синусоидальный, так и комплексный экспоненциальный сигнал является периодичной функцией, период которой равен 2π, деленному на частоту. В дискретном случае последовательность считают периодичной, если $x[n] = x[n+N], \quad \forall\, n,$

где период N — обязательно целое число. Проверяя это условие для дискретных синусоид, получим $A\cos(\omega_0 n + \varphi) = A\cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi),$

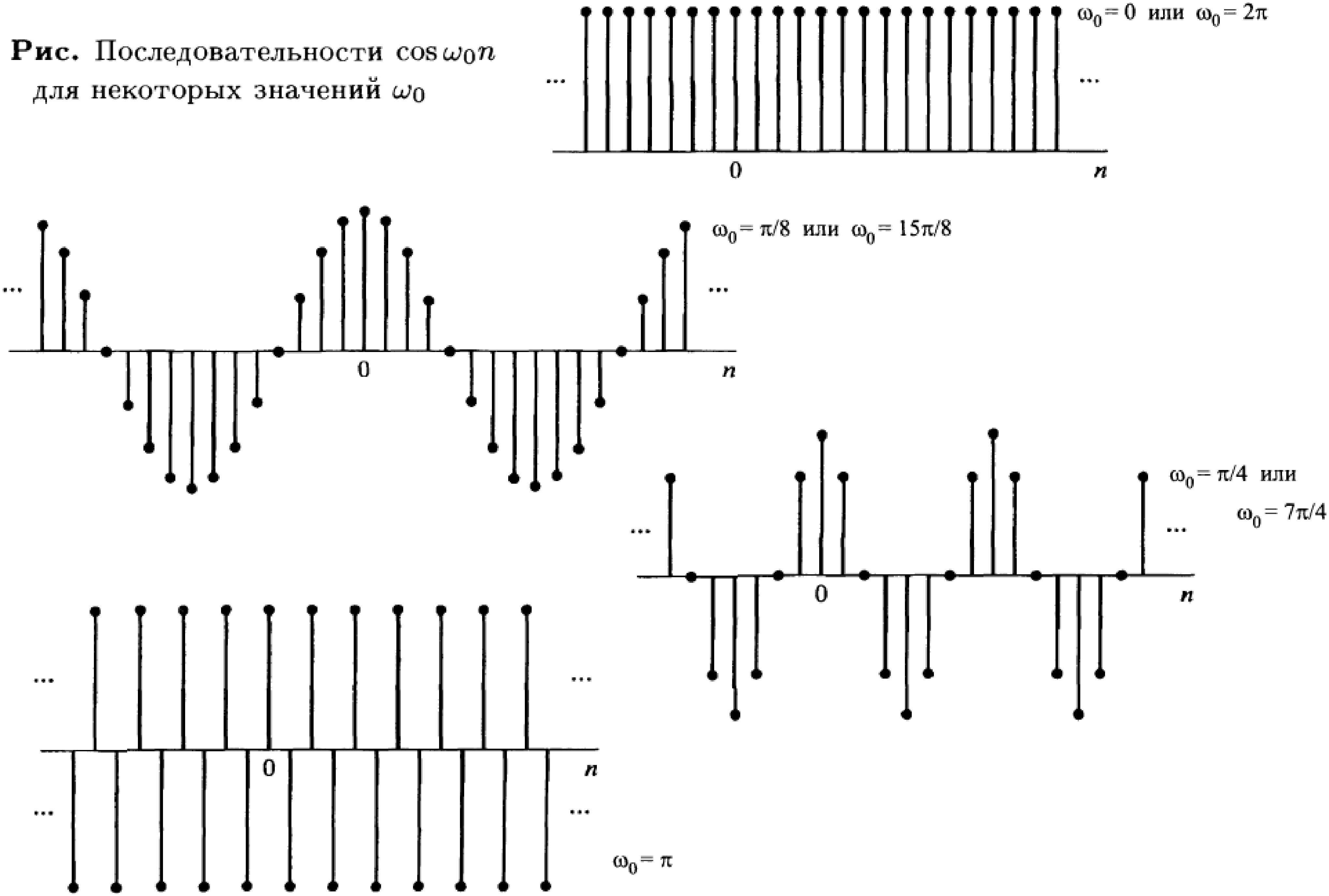
откуда $\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Аналогичное утверждение имеет место и для комплексной экспоненциальной последовательности $Ce^{j\omega_0 n}$. Она будет N-периодичной, только если

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}.$$

Это равенство верно тогда, когда $\omega_0 N = 2\pi k$.
Следовательно, комплексная экспоненциальная и синусоидальная последовательности не обязательно меняются периодично в зависимости от n с периодом $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Свойство их периодичности зависит от значения частоты ω_0.

Рис. Последовательности $\cos \omega_0 n$ для некоторых значений ω_0



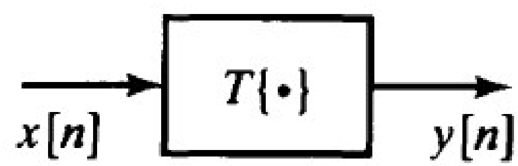
ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

С точки зрения математики *система с дискретным временем* определяется как преобразование, или оператор, переводящий входную последовательность (*сигнал*) $x[n]$ в выходную последовательность $y[n]$ (*отклик*, или *реакцию системы*), что можно обозначить как

$$y[n] = T\{x[n]\} \qquad (*)$$

и изображать графически, как показано на рис.

Рис. Графическое представление дискретной системы



Соотношение $(*)$ — это правило, или формула, по которому вычисляются значения реакции системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход, отсчет реакции системы с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x[n]$.

Следующие примеры знакомят с некоторыми простыми, но полезными системами.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Идеальная система задержки

Идеальная система задержки (ИСЗ) определяется по формуле

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty, \qquad (\ast\ast)$$

где n_d — фиксированное натуральное число, называемое *задержкой* системы. Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов. Если в формуле $(\ast\ast)$ взять в качестве n_d фиксированное отрицательное целое число, то система будет сдвигать входную последовательность влево на $|n_d|$ отсчетов, что соответствует опережению времени.

Скользящее среднее

Общая система скользящего среднего имеет вид:

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times$$
$$\times \left(x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \cdots + x[n] + \cdots + x[n - M_2] \right).$$

Она вычисляет n-й отсчет входной последовательности как среднее арифметическое $(M_1 + M_2 + 1)$ отсчетов входной, расположенных вокруг n-го.

Системы без запоминания

Систему, n-й отсчет $y[n]$ реакции которой при каждом n зависит только от одного отсчета (с тем же самым индексом n) входного сигнала $x[n]$, называют *системой без запоминания.*

Примером может служить система, в которой $y[n] = \left(x[n]\right)^2 \quad \forall\, n.$

Линейные системы

Класс *линейных систем* определяется по принципу суперпозиции. Если $y_1[n]$ и $y_2[n]$ — отклики системы на сигналы $x_1[n]$ и $x_2[n]$, то систему называют *линейной* тогда и только тогда, когда

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \quad \text{и} \quad T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\},$$

где a — произвольная константа. Первое из свойств называют *аддитивностью*, а второе — *однородностью.* Оба свойства можно записать одной формулой по принципу суперпозиции:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\},$$

где a и b — произвольные константы. Последнее соотношение может быть переписано для нескольких сигналов, а именно

$$\text{если} \quad x[n] = \sum_k a_k x_k[n], \quad \text{то} \quad y[n] = \sum_k a_k y_k[n],$$

где $y_k[n]$ — реакция системы на поданный сигнал $x_k[n]$.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Сумматор

Система, определяемая уравнением $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k],$

называется *сумматором*, поскольку значение ее реакции в момент времени n равно сумме всех предыдущих отсчетов входной последовательности вплоть до n-го. Чтобы доказать линейность сумматора, нам необходимо показать, что он удовлетворяет принципу суперпозиции при любых входных сигналах, не ограничиваясь частными случаями. Подадим на вход сумматора две произвольные последовательности $x_1[n]$, $x_2[n]$ и вычислим соответствующие отклики:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k], \quad y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k].$$

Если теперь на вход сумматора подать сигнал $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, то по принципу суперпозиции вне зависимости от выбранных констант a и b мы должны получить равенство $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$. Проверим это

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[n] + bx_2[n]) = a \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] = ay_1[n] + by_2[n].$$

Итак, сумматор действительно удовлетворяет принципу суперпозиции, т. е. является линейной системой.

В общей ситуации доказать, что данная система не является линейной (если она и вправду нелинейна), гораздо проще, чем обосновать ее линейность (если она все-таки линейна). Для этого достаточно предъявить пару входных последовательностей и констант, для которых нарушается принцип суперпозиции.

Нелинейная система

Рассмотрим систему
$$w[n] = \log_{10} |x[n]|.$$

Эта система нелинейна. Для доказательства нам достаточно найти один контрпример, т. е. пару сигналов, на которой нарушается принцип суперпозиции. Возьмем сигналы $x_1[n] = 1$ и $x_2[n] = 10$. Соответствующие отклики — $w_1[n] = 0$ и $w_2[n] = 1$. Требование однородности в линейных системах в данной ситуации диктует соотношение $w_2[n] = 10w_1[n]$, поскольку $x_2[n] = 10x_1[n]$. Однако у нас это не выполнено. Значит, система нелинейна.

Стационарные системы

К *стационарным* относят системы, для которых временной сдвиг (или задержка) входной последовательности индуцирует соответствующий сдвиг выходной последовательности. Более формально определение выглядит так. Пусть дискретная система определена формулой $y[n] = T\{x[n]\}$. Она называется стационарной, если для любой входной последовательности $x[n]$ и произвольного целого числа n_0 выполнено соотношение $T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$. Стационарные системы иногда еще называют системами, *инвариантными относительно сдвигов*.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Следующий пример знакомит с нестационарной системой.

Компрессор

Система, определенная соотношением

$$y[n] = x[Mn], \qquad -\infty < n < \infty,$$

где M — натуральное число, называется *уплотнителем*. Вольно говоря, эта система отбрасывает $M-1$ из каждых M отсчетов входной последовательности, оставляя только M-й. Она, конечно, нестационарна, в чем легко убедиться, рассмотрев реакцию $y_1[n]$ системы на входной сигнал $x_1[n-n_0]$. Если бы наша система была стационарна, то выполнялось бы равенство $y_1[n] = y[n-n_0]$. Однако

$$y_1[n] = x_1[Mn] = x[Mn - n_0] \neq y[n-n_0] = x[M(n-n_0)].$$

Другой способ проверки нестационарности системы состоит в предъявлении контрпримера, т. е. входной последовательности, на которой нарушается условие стационарности. Пусть, например, $M = 2$, $x[n] = \delta[n]$ и $x_1[n] = \delta[n-1]$. Тогда $y[n] = \delta[Mn] = \delta[n]$, но $y_1[n] = \delta[Mn-1] = 0$. Следовательно, $y_1[n] \neq y[n-1]$, что противоречит условию стационарности.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Правая и левая разностные системы

Рассмотрим *правую разностную* систему, определенную по правилу

$$y[n] = x[n+1] - x[n].$$

Она не является детерминированной, так как каждый из членов выходной последовательности с номером n вычисляется как по $x[n]$, так и по $x[n+1]$. Нарушение детерминированности легко заметить, взяв в качестве входных последовательностей $x_1[n] = \delta[n-1]$ и $x_2[n] = 0$. Соответствующие отклики — $y_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ и $y_2[n] = 0$. Заметим, что $x_1[n] = x_2[n]$ при $n \leqslant 0$. Поэтому, по определению детерминированности, должно выполняться равенство $y_1[n] = y_2[n]$ для всех $n \leqslant 0$, которое нарушается при $n = 0$. Итак, предъявив контрпример, мы показали, что правая разностная система недетерминированная.

Левая разностная система определяется как $y[n] = x[n] - x[n-1]$.

Каждый член выходной последовательности этой системы зависит от члена с тем же номером входной последовательности и одного предыдущего. Значит, она является детерминированной.

Устойчивость

Говорят, что система *устойчива*, если и только если ее реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена. Напомним, что последовательность $x[n]$ называется *ограниченной*, если найдется такое конечное положительное число B_x, что

$$\forall n \qquad |x[n]| \leqslant B_x < \infty.$$

Таким образом, в устойчивой системе для каждой ограниченной входной последовательности найдется такая положительная константа B_y, что

$$\forall n \qquad |y[n]| \leqslant B_y < \infty.$$

Важно осознать, что свойство, которое мы здесь определили, — это свойство системы, а не входных последовательностей. Иначе говоря, мы вполне можем предъявить пары сигнал – отклик, обладающие указанным свойством. Но наличие таких пар еще не означает устойчивости системы. Данная система будет устойчива только в том случае, когда этим свойством обладают *все* пары. Например, для неустойчивой системы мы можем найти ряд ограниченных сигналов, на которые наша система дает ограниченные отклики, однако результат применения устойчивой системы к *любой* ограниченной входной последовательности должен быть ограниченным. Поэтому, как только нам удалось найти хотя бы одну ограниченную последовательность, отклик на которую будет неограниченным, можно с уверенностью заключить, что эта система неустойчива.

Линейные стационарные системы

Особое значение имеет класс систем, являющихся одновременно как линейными, так и стационарными. Наличие этих свойств позволяет представить системы в удобном виде. Более того, они играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов. Класс линейных систем определяется с помощью принципа суперпозиции уравнением

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\},$$

где a и b — произвольные константы.

Учитывая свойство линейности и представление общей последовательности в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

можно заметить, что линейная система полностью определяется своей реакцией на сдвинутые импульсные последовательности. Более точно, пусть $h_k[n]$ — реакция системы на $\delta[n-k]$. Тогда согласно

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}.$$

По принципу суперпозиции

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n].$$

Итак, мы получили, что реакция линейной системы на любую входную последовательность выражается в терминах откликов системы на сигналы $\delta[n-k]$.

Линейные стационарные системы

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n].$$

Итак, мы получили, что реакция линейной системы на любую входную последовательность выражается в терминах откликов системы на сигналы $\delta[n-k]$. Если система всего лишь линейна, то отсчеты $h_k[n]$ зависят как от k, так и от n.

Однако можно получить более полезный результат, если к свойству линейности добавить условие стационарности.

Свойство стационарности влечет, что если $h[n]$ — реакция системы на $\delta[n]$ (называемая *импульсной характеристикой* системы), то ее реакция на сигнал $\delta[n-k]$ равна $h[n-k]$. Опираясь на этот факт, уравнение можно переписать

в виде $\quad y[n] = \sum_{k=-\infty} x[k]h[n-k]. \quad (*)$

Как следствие этой формулы, отметим, что линейная стационарная система (ЛС-система) полностью определяется своей импульсной характеристикой $h[n]$ в том смысле, что при известной последовательности $h[n]$, опираясь на $(*)$, можно вычислить отклик $y[n]$ на *любой* поданный сигнал $x[n]$.

Если отсчеты последовательности $y[n]$ зависят от отсчетов $h[n]$ и $x[n]$ по правилу $(*)$, то последовательность $y[n]$ называют (дискретной) *сверткой* последовательностей $h[n]$ и $x[n]$ и употребляют обозначение: $y[n] = x[n] * h[n]$.

Линейные стационарные системы

$$y[n] = \sum_{k=-\infty} x[k]h[n-k]. \quad (*)$$

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

Операция дискретной свертки строит последовательность $y[n]$ по двум данным последовательностям $x[n]$ и $h[n]$. Уравнение $(*)$ выражает каждый отсчет выходной последовательности через все отсчеты входной последовательности и импульсную характеристику.

Формула $(*)$ наводит на мысль, что отсчет входной последовательности с номером $n = k$, представленный как $x[k]\delta[n-k]$, преобразуется системой в выходную последовательность $x[k]h[n-k]$ для $-\infty < n < \infty$, и что для каждого k эти последовательности комбинируются для формирования абсолютно всех выходных последовательностей. Эта интерпретация иллюстрируется рис. , где показана импульсная характеристика, простая входная последовательность с тремя ненулевыми отсчетами, индивидуальные ответы на каждый такой отсчет и их комбинация, дающая отклик системы. Более конкретно, $x[n]$ можно представить в виде суммы трех последовательностей $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ и $x[3]\delta[n-3]$, представляющих три ненулевых отсчета последовательности $x[n]$. Последовательности $x[-2]h[n+2]$, $x[0]h[n]$ и $x[3]h[n-3]$ — отклики системы на входные сигналы $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ и $x[3]\delta[n-3]$ соответственно. После этого реакция системы на сигнал $x[n]$ получается в виде суммы этих индивидуальных откликов.

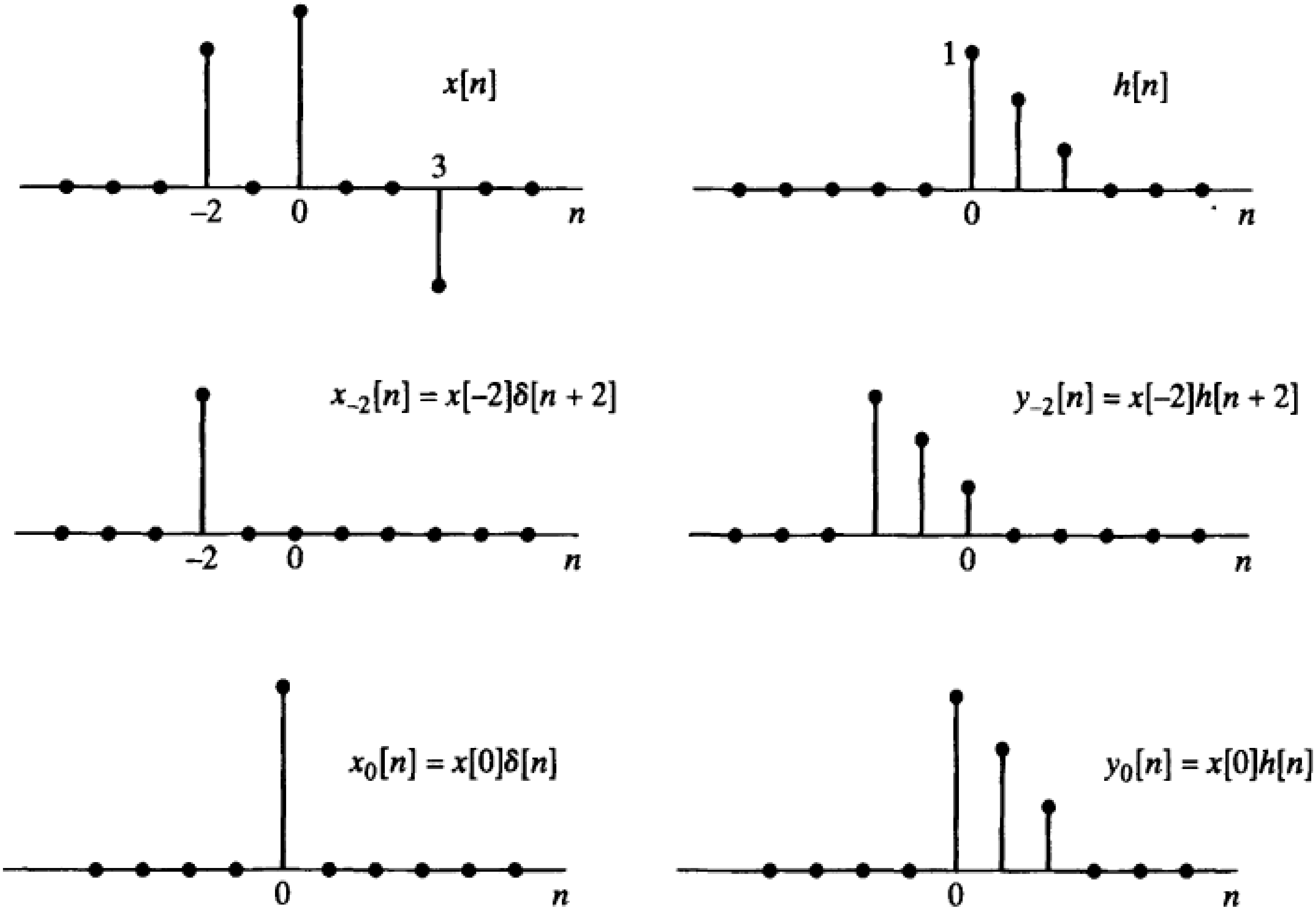


Рис. Представление входной последовательности линейной стационарной системы в виде суперпозиции ответов на индивидуальные отсчеты

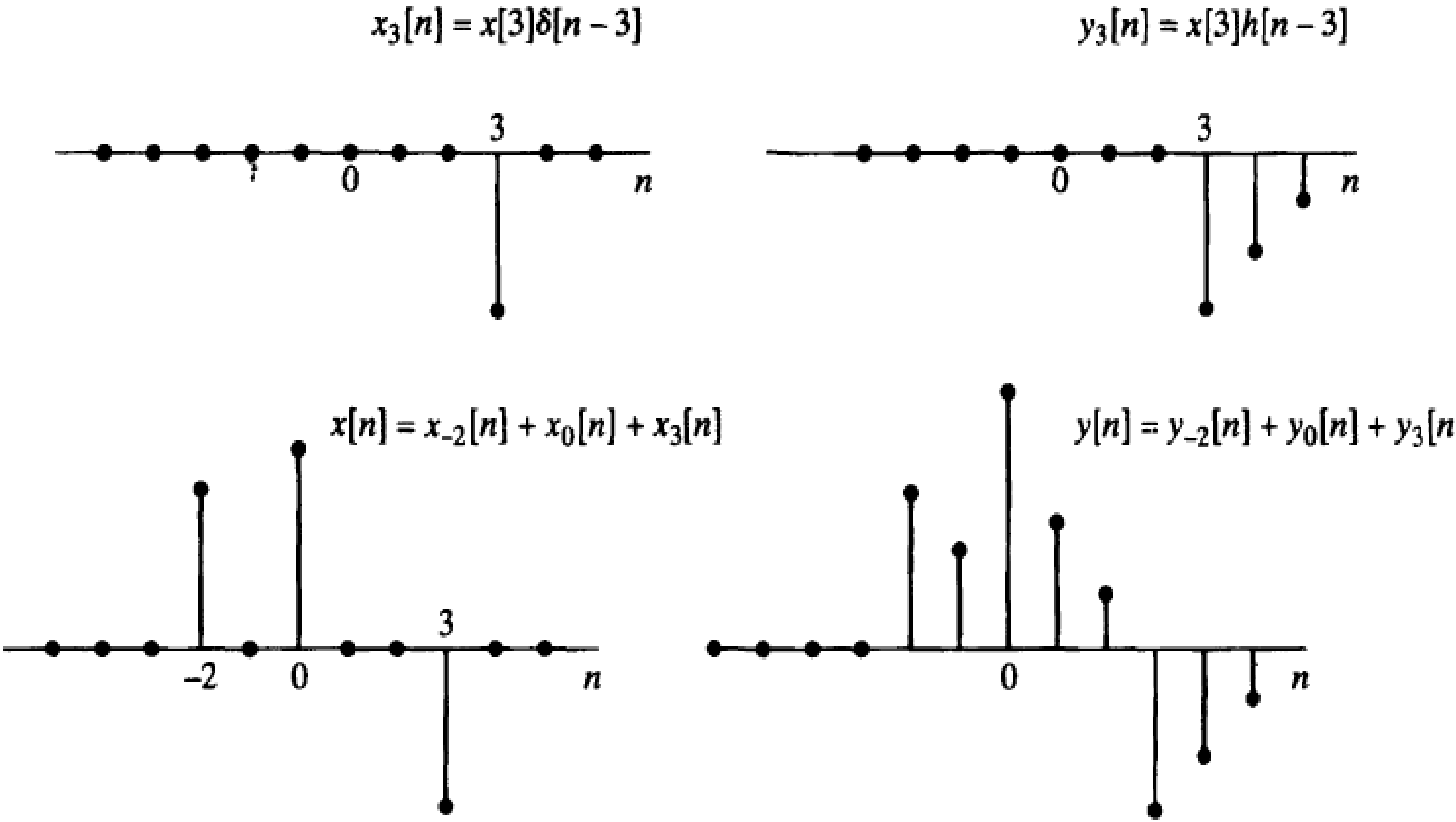


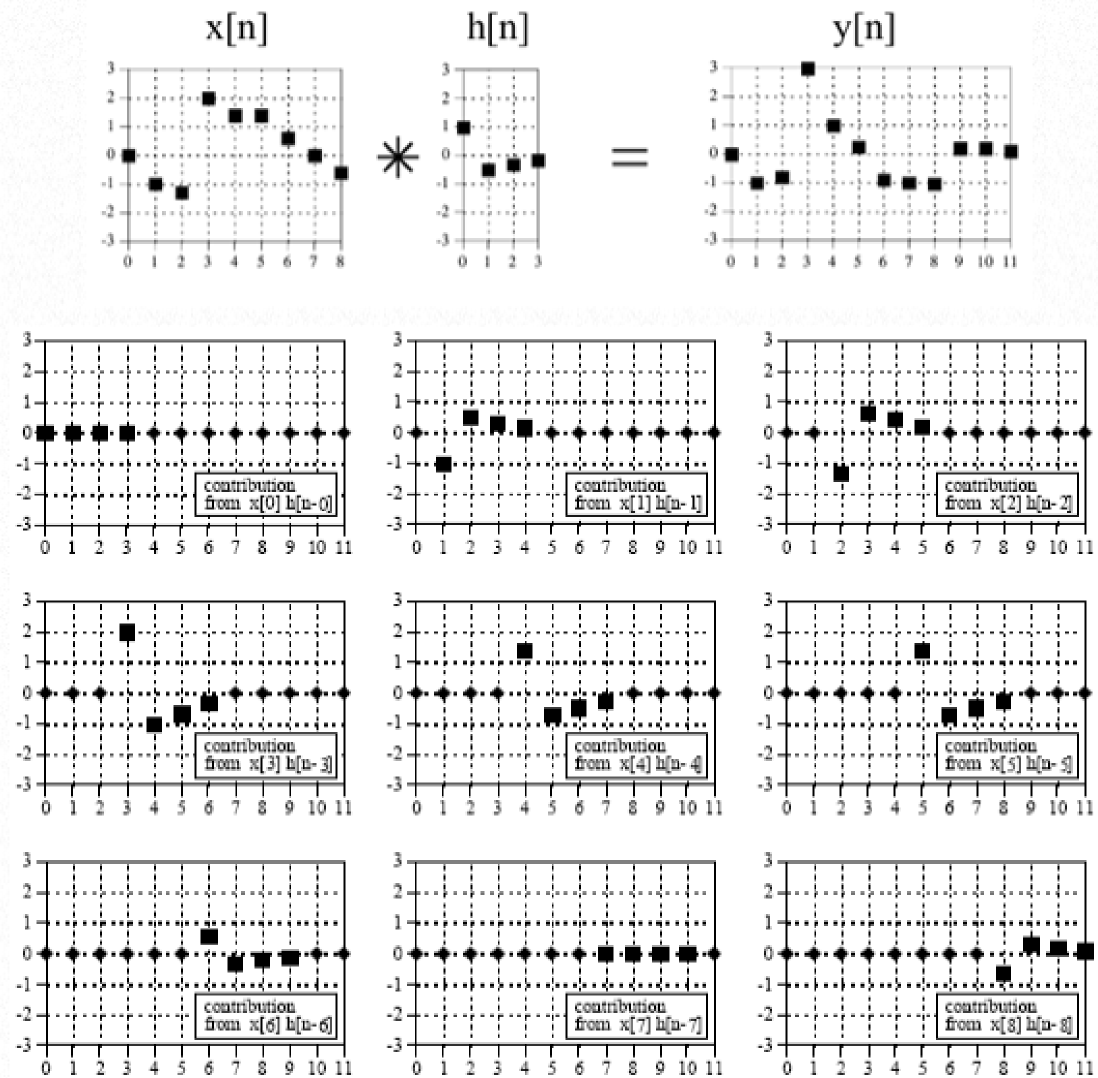
Рис. Представление входной последовательности линейной стационарной системы в виде суперпозиции ответов на индивидуальные отсчеты

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Подход к операции свертки со стороны входного сигнала

На рисунке показан пример выполнения операции свертка: входной сигнал $x[n]$, состоящий из 9 отсчетов, поступает на вход системы, импульсная характеристика которой $h[n]$ содержит 4 отсчета. В результате получается выходной сигнал $y[n]$, состоящий из $9 + 4 - 1 = 12$ отсчетов.

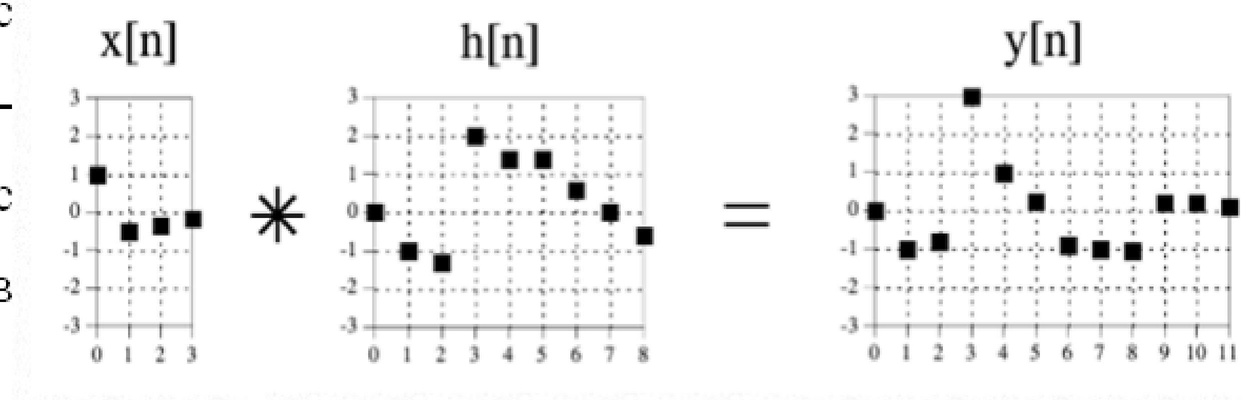
Этот рисунок отображает подход к операции свертка со стороны входного сигнала (т.е. концептуального подхода) – входной сигнал раскладывается на импульсные составляющие, которые поступают в систему, а выходной сигнал является суммой откликов системы на эти составляющие. Каждый отсчет входного сигнала взаимодействует со сдвинутой импульсной характеристикой системы для получения соответствующего отклика. Девять полученных откликов складываются для получения выходного сигнала.



Подход к операции свертка со стороны входного сигнала

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

На рисунке показан пример входного сигнала, состоящего из 4 отсчетов, и импульсной характеристики системы, состоящей из 9 отсчетов (т.е., два этих сигнала поменялись местами, по сравнению с предыдущим примером). Но выходной сигнал полностью совпадает с выходным сигналом, полученным в предыдущем примере.



Второй пример операции свертки

Это говорит об одном важном свойстве операции свертки – **перестановки или коммутативности (commutative):**

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n].$$

С математической точки зрения не важно, какой из сигналов является входным, а какой – импульсной характеристикой. Важно, что над двумя сигналами выполняется операция свертки. Для реальных систем эти два значения различны и имеют разный физический смысл, а используемый математический аппарат позволяет получить верный результат.

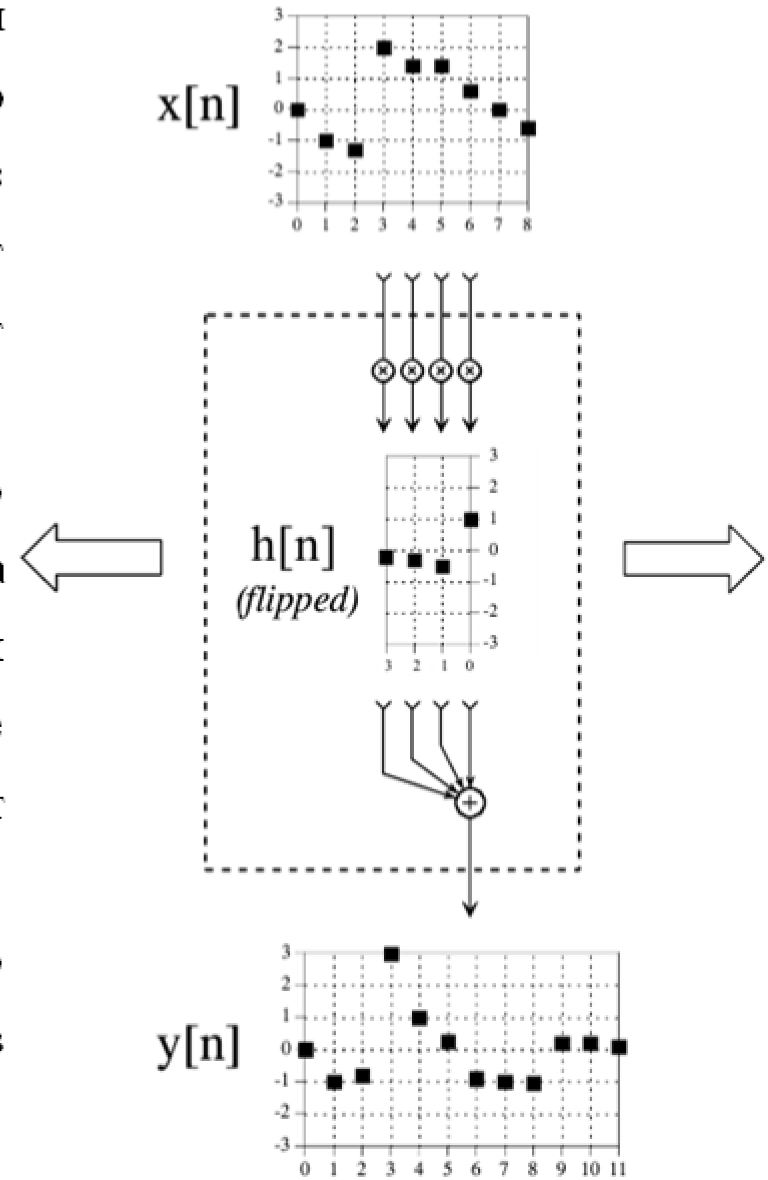
ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Второй подход к операции свертки

Первый подход к операции свертка отражает, каким образом каждый отсчет *входного сигнала* создает несколько отсчетов выходного сигнала. Второй подход отражает, из каких составляющих отсчетов входного сигнала состоит каждый отсчет *выходного сигнала*. Такой подход предполагает решение уравнения следующего вида: $y[n]$ = *комбинация некоторых переменных*. Это означает, что n-отсчет выходного сигнала определяется как комбинация некоторого количества отсчетов входного сигнала и импульсной характеристики системы. Данный подход позволяет определить значение отдельного отсчета выходного сигнала независимо от остальных отсчетов.

На рисунке показан способ получения значения одного отсчета выходного сигнала по некоторому количеству отсчетов входного сигнала (для $y[6]$):

$$y[6]=x[3]h[3]+x[4]h[2]+x[5]h[1]+x[6]h[0].$$

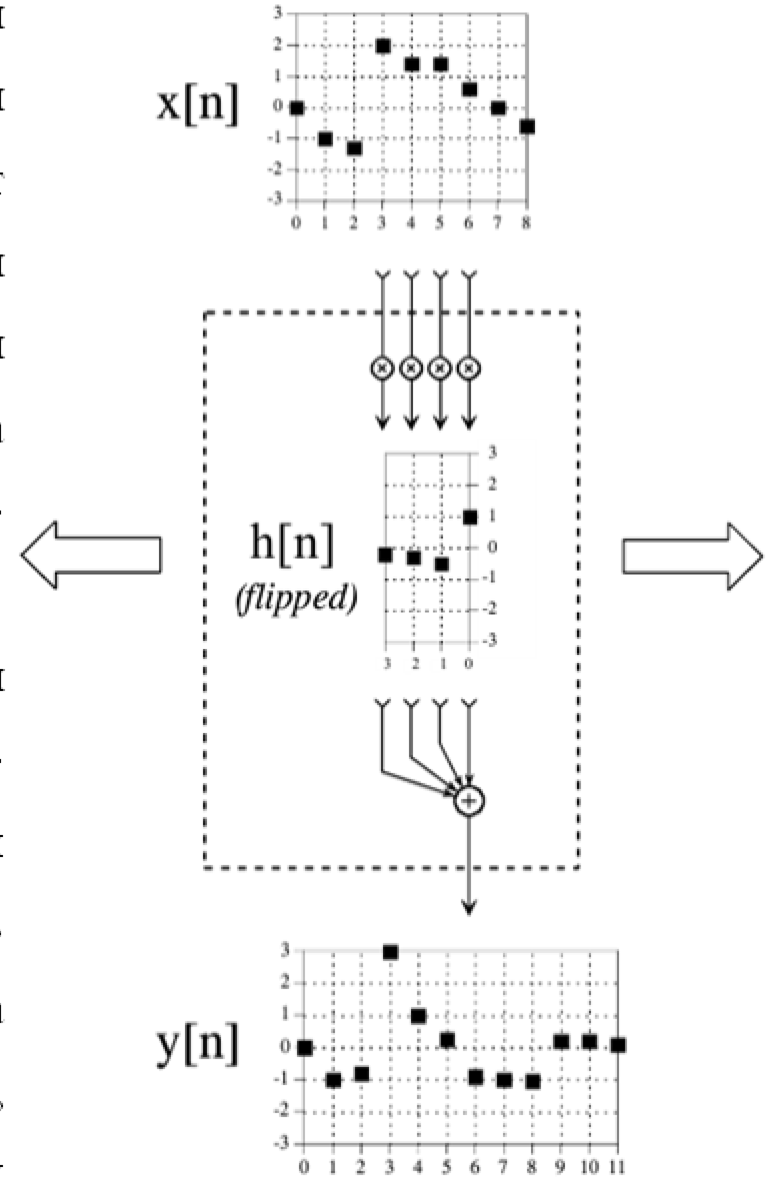


Сверточная машина

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Показанная схема вычисления свертки называется **сверточной машиной** (convolution machine). Сверточная машина обозначена штриховой линией и может передвигаться вправо и влево, позволяя вычислять значения каждого отсчета выходного сигнала. Для получения значения выходного отсчета, несколько отсчетов входного сигнала перемножаются с соответствующими значениями импульсной характеристики, а затем складываются.

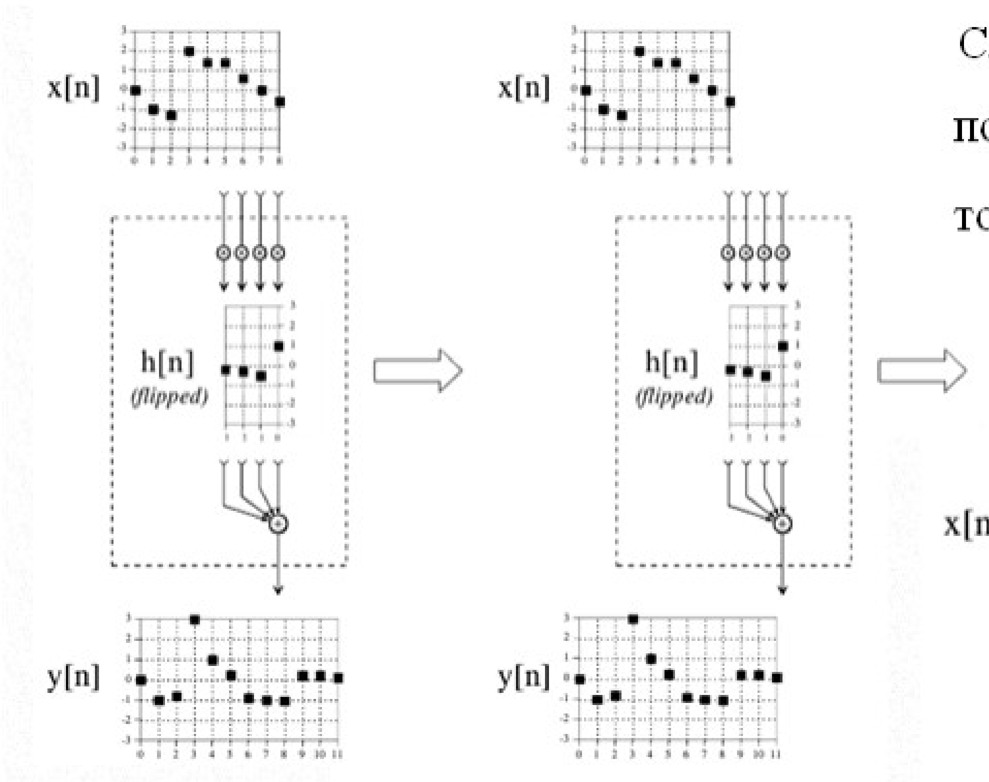
Расположения отсчетов импульсной характеристики внутри сверточной машины очень важно. Отсчеты импульсной характеристики *расположены зеркально*, т.е. младший отсчет располагается справа, а нарастание номеров отсчетов происходит влево. Т.е. каждый отсчет выходного сигнала состоит из нескольких отсчетов входного сигнала, взвешенных с *зеркально отраженными* отсчетами импульсной характеристики.

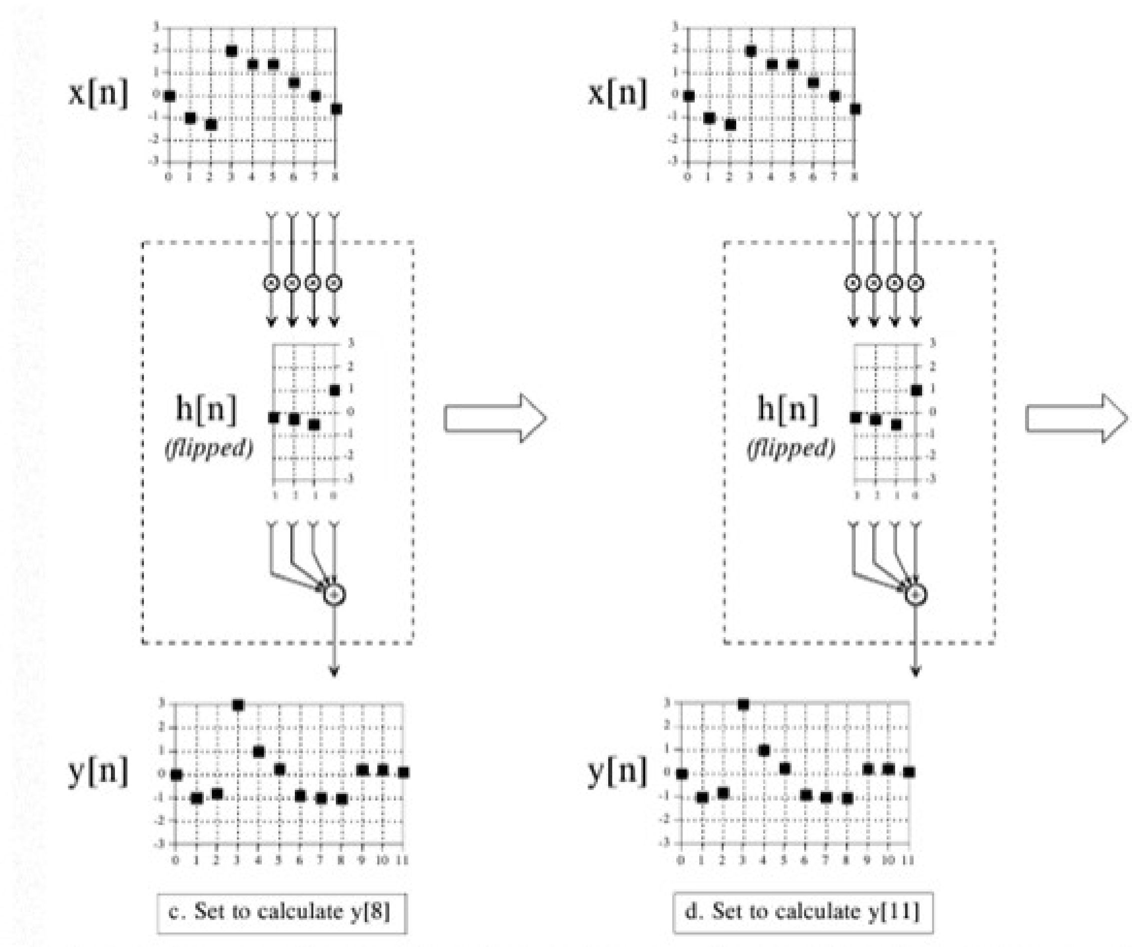


Сверточная машина

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Следующий рисунок отображает пример получения значения отсчетов для некоторых точек выходного сигнала.





Получение значения отсчетов выходного сигнала

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Свойства линейных стационарных систем

Поскольку линейные стационарные системы описываются сверткой, свойства этого класса систем определяются свойствами дискретной свертки. Следовательно, импульсная характеристика конкретной системы содержит всю полноту информации.

Некоторые общие свойства класса линейных стационарных систем можно обнаружить, изучая свойства операции свертки. Например, свертка — коммутативная операция:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n].$$

Коммутативность можно доказать, осуществив замену параметра суммирования

$$y[n] = \sum_{m=\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] * x[n],$$

Иными словами, отклик системы на сигнал $x[n]$ при импульсной характеристике $h[n]$ будет тем же, что и реакция на сигнал $h[n]$ при импульсной характеристике $x[n]$.

Свертка удовлетворяет свойству дистрибутивности относительно сложения, а именно

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n].$$

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Свойство дистрибутивности описывает функционирование *параллельных систем с сумматором на выходе*. Это свойство позволяет заменить несколько параллельно включенных подсистем одной системой с импульсной характеристикой, соответствующей сумме импульсных характеристик всех подсистем.

Свойство <u>ассоциативности</u> или сочетательности выглядит так:

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n]).$$

Свойство сочетательности используется при описании *каскадного способа соединения* внутри системы. Две подсистемы соединяются каскадом, если выход одной подсистемы является входом другой подсистемы. Порядок каскадирования не влияет на выходной сигнал. Любое количество подсистем может быть заменено одной системой, если её импульсная характеристика представляет свертку импульсных характеристик всех подсистем.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

При *каскадном соединении* (последовательном) систем реакция первой системы подается на вход второй, отклик второй — на вход третьей и т. д. Отклик последней системы служит реакцией всей цепочки систем. Две линейные стационарные системы, подключенные последовательно, образуют одну линейную стационарную систему, чья импульсная характеристика совпадает со сверткой импульсных характеристик обеих систем, что иллюстрирует рис. На верхнем блоке диаграмм рисунка реакция первой системы на $x[n] = \delta[n]$ равна $h_1[n]$. Поэтому выходная последовательность из второй системы (и, по определению, импульсная характеристика каскада систем) должна быть равна

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n].$$

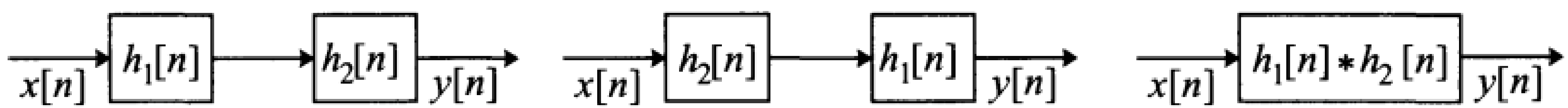


Рис. Три линейных стационарных системы с одной и той же импульсной характеристикой

Как следствие коммутативности свертки импульсная характеристика каскада линейных стационарных систем не зависит от порядка, в котором они подключаются друг к другу. Этот факт отражен на рис. , где три системы имеют одну и ту же импульсную характеристику.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

При *параллельном соединении* системы имеют общий вход, а их выходные последовательности складываются и дают реакцию всего соединения.

Как следует из дистрибутивности свертки, параллельное соединение двух линейных стационарных систем можно заменить одной линейной стационарной системой, чья импульсная характеристика равна сумме характеристик компонент соединения (рис.), т. е. $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$.

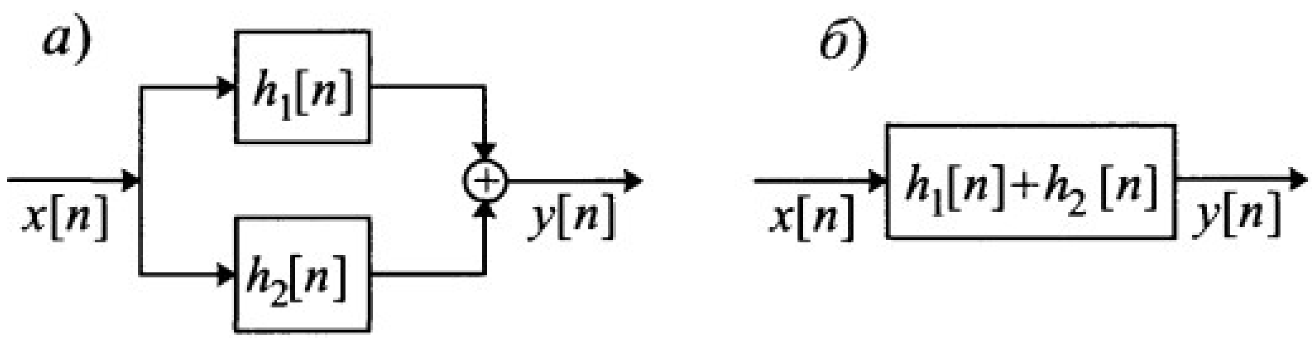


Рис. *а*) параллельное соединение линейных стационарных систем; *б*) система, эквивалентная системе *а*)

ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Линейная стационарная система **физически реализуема**, если величина отклика при $n=n_0$ зависит только от отсчетов входной последовательности с номерами $n \le n_0$. Для линейных стационарных систем это означает, что импульсная характеристика $h[n]$ равна нулю при $n<0$.

Некоторые системы, имеющие большое теоретическое значение, физически нереализуемы. К ним относятся идеальный фильтр нижних частот и идеальный дифференциатор. Поэтому значительная часть теории фильтров посвящена методам аппроксимации физически нереализуемых систем реализуемыми системами.

Линейная стационарная система **устойчива**, если при любой ограниченной входной последовательности выходная последовательность также ограничена. Необходимым и достаточным условием устойчивости системы является следующее требование к импульсной характеристике:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty . \qquad (1)$$

На рис. приведены примеры импульсных характеристик устойчивой и неустойчивой систем. Импульсная характеристика, приведенная на рис. *а*, имеет вид $h[n]=\alpha^n u_{-1}[n]$, причем $0 < \alpha < 1$, поэтому условие (1) удовлетворяется и система устойчива. Выражение для импульсной характеристики, представленной на рис. *б*, имеет тот же вид, но $\alpha > 1$, поэтому условие (1) не выполняется и система неустойчива.

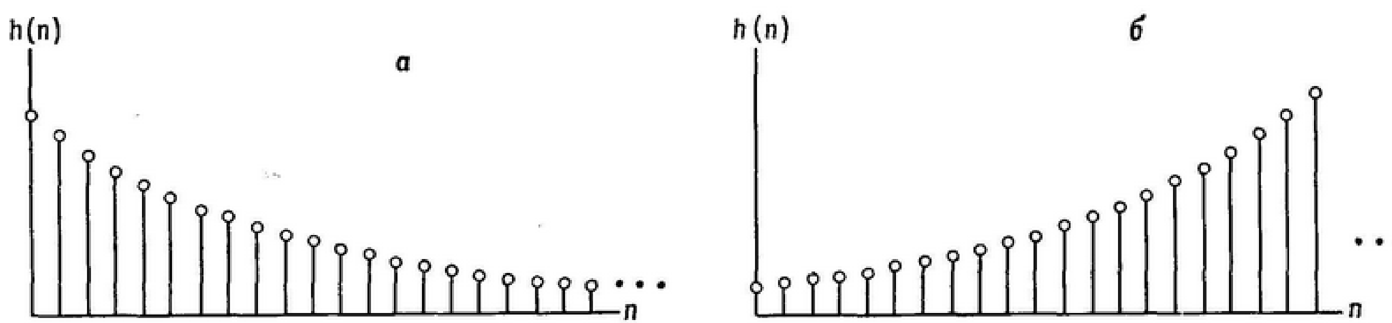


Рис. Примеры импульсных характеристик систем: устойчивой – *а*) и неустойчивой – *б*)

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Модели сигналов в виде функции времени предназначены, в первую очередь, для анализа формы сигналов. При решении задач прохождения сигналов сложной формы через какие-либоустройства такая модель сигнала часто не совсем удобна и не позволяет понять суть происходящих в устройствах физических процессов.

Поэтому сигналы представляют набором элементарных (базисных) функций, в качестве которых наиболее часто используют ортогональные гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Выбор именно таких функций обусловлен тем, что они являются, с математической точки зрения, собственными функциями инвариантных во времени линейных систем (систем, параметры которых не зависят от времени), т.е. не изменяют своей формы после прохождения через эти системы. В результате сигнал может быть представлен множеством амплитуд, фаз и частот гармонических функций, совокупность которых называется спектром сигнала.

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Таким образом, существуют две формы представления произвольного детерминированного сигнала: **временное** и **частотное (спектральное)**. Первая форма представления основана на математической модели сигнала в виде функции времени x(t), вторая – на математической модели сигнала в виде функции частоты $\omega = 2\pi f$, причем эта модель существует только в области комплексных функций $X(j\omega)$.

Обе формы представления сигнала связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt; \qquad (3)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (4)$$

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Обе формы представления сигнала связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt; \qquad (3)$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \qquad (4)$$

При использовании линейной частоты $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$ преобразования Фурье имеют следующий вид:

$$X(jf)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt; \qquad (5)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f)e^{j2\pi ft}\,df. \qquad (6)$$

Из формул (3)-(6) следует, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте.

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Пример. Временное представление гармонического сигнала имеет следующий вид: $x(t)=\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$,

или

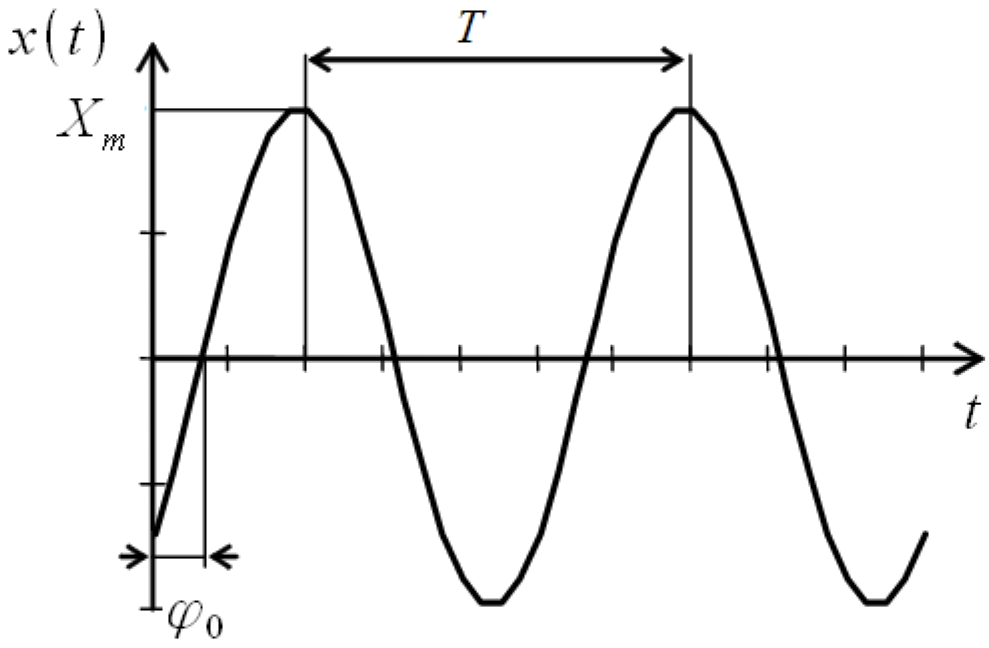
$$x(t)=X_m \sin(2\pi f_0 t+\varphi_0)=X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t+\varphi_0\right).$$

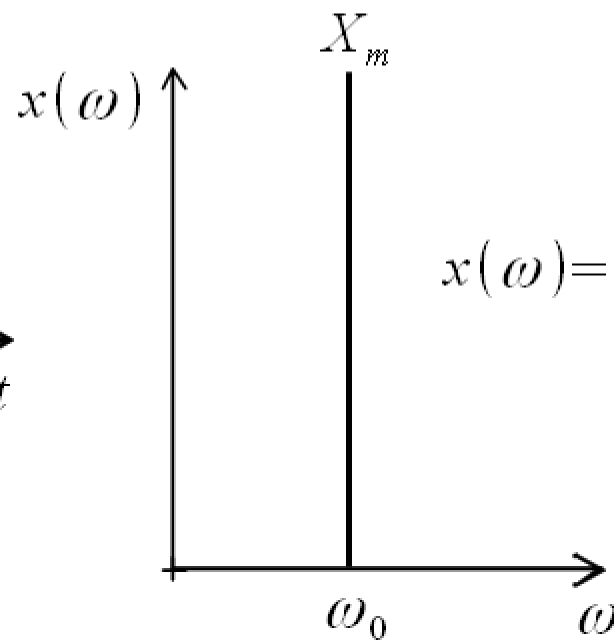
Для представления такого сигнала в частотной области достаточно задать две функции частоты, показывающие, что на частоте $\omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T}$ амплитуда сигнала равна X_m, а начальная фаза равна φ_0:

$$x(\omega)=\begin{cases} X_m, & \omega=\omega_0, \\ 0, & \omega\neq\omega_0; \end{cases} \qquad \varphi(\omega)=\begin{cases} \varphi_0, & \omega=\omega_0, \\ 0, & \omega\neq\omega_0. \end{cases}$$

Зависимость $x(\omega)$ называется амплитудным спектром, зависимость $\varphi(\omega)$ – фазовым спектром, а их совокупность – просто спектром сигнала.

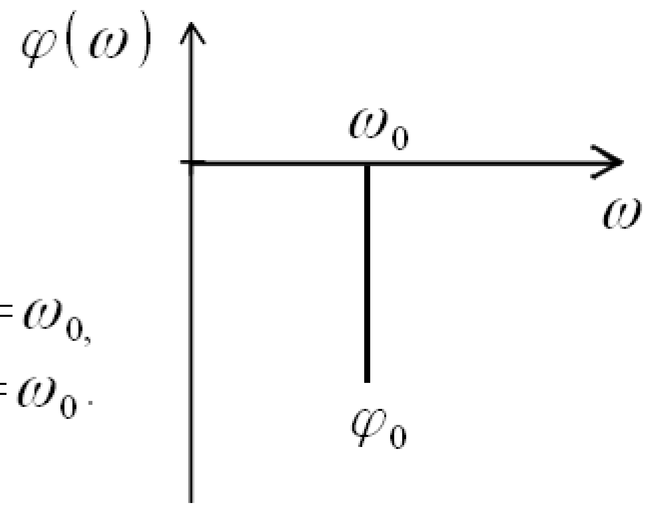
ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ





$$x(\omega)=\begin{cases} X_m, & \omega=\omega_0, \\ 0, & \omega\neq\omega_0; \end{cases}$$

$$x(t)=\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$



$$\varphi(\omega)=\begin{cases} \varphi_0, & \omega=\omega_0, \\ 0, & \omega\neq\omega_0. \end{cases}$$